

# Lugar Geométrico de las Raíces

## Introducción

La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado. Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida. Por tanto, es importante que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano  $s$  conforme varía la ganancia de lazo.

Desde el punto de vista del diseño, un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado a las posiciones deseadas. A continuación el problema de diseño se centra en la selección de un valor de ganancia adecuada. Si el ajuste de la ganancia no produce por sí solo un resultado conveniente, será necesario agregar al sistema un compensador.

Los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Si ésta tiene un grado superior a 3, es muy laborioso encontrar sus raíces y se requerirá de una solución con computadora. Sin embargo, simplemente encontrar las raíces de la ecuación característica puede tener un valor limitado, debido a que, conforme varía la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto, la ecuación característica cambia y deben repetirse los cálculos. W. R. Evans diseñó un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se usa ampliamente en la ingeniería de control. Este método se denomina método del lugar geométrico de las raíces, y en él se grafican las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema.

## Método del Lugar Geométrico de las Raíces

La idea básica detrás del método del lugar geométrico de las raíces es que los valores de  $s$  que hacen que la función de transferencia alrededor del lazo sea igual a  $-1$  deben satisfacer la ecuación característica del sistema. El método debe su nombre al lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado conforme la ganancia varía de cero a infinito. Dicha gráfica muestra claramente cómo contribuye cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado.

Al diseñar un sistema de control lineal, el método del lugar geométrico de las raíces resulta muy útil, dado que indica la forma en la que deben modificarse los polos y ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema.

Algunos sistemas de control pueden tener más de un parámetro que deba ajustarse. El diagrama del lugar geométrico de las raíces, para un sistema que tiene parámetros múltiples, se construye variando un parámetro a la vez.

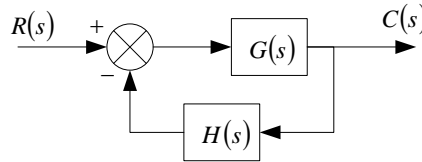
En la mayor parte de los casos, el parámetro del sistema es la ganancia de lazo  $K$ , aunque el parámetro puede ser cualquier otra variable del sistema. Si el diseñador sigue las reglas generales para construir los lugares geométricos, le resultará sencillo trazar los lugares geométricos de las raíces de un sistema específico.

Debido a que generar los lugares geométricos de las raíces usando MATLAB es muy simple, se podría pensar que trazar los lugares geométricos de las raíces en forma manual es una pérdida de tiempo y esfuerzo. Sin embargo, una buena forma de interpretar los lugares geométricos generados por la computadora es adquirir la experiencia de trazar los lugares geométricos en forma manual, cosa que, además, proporciona con mucha rapidez una idea global de los lugares geométricos.

## Graficas del Lugar Geométrico de las Raíces

### Condiciones de Ángulo y Magnitud

Considere el sistema de control realimentado mostrado en la Figura siguiente.



**Figura 1. Sistema de Control Realimentado**

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del segundo miembro de la ecuación anterior sea igual a cero.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

Los valores de  $s$  que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado. El lugar geométrico de las raíces es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud.

En muchos casos,  $G(s)H(s)$  contiene un parámetro de ganancia  $K$ , y la ecuación característica se escribe como:

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

Entonces, los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de los polos en lazo cerrado conforme la ganancia  $K$  varía de cero a infinito.

Observe que, para empezar a trazar los lugares geométricos de las raíces de un sistema mediante el método analizado aquí, se debe conocer la ubicación de los polos y los ceros de  $G(s)H(s)$ . Recuerde que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba  $s$  se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

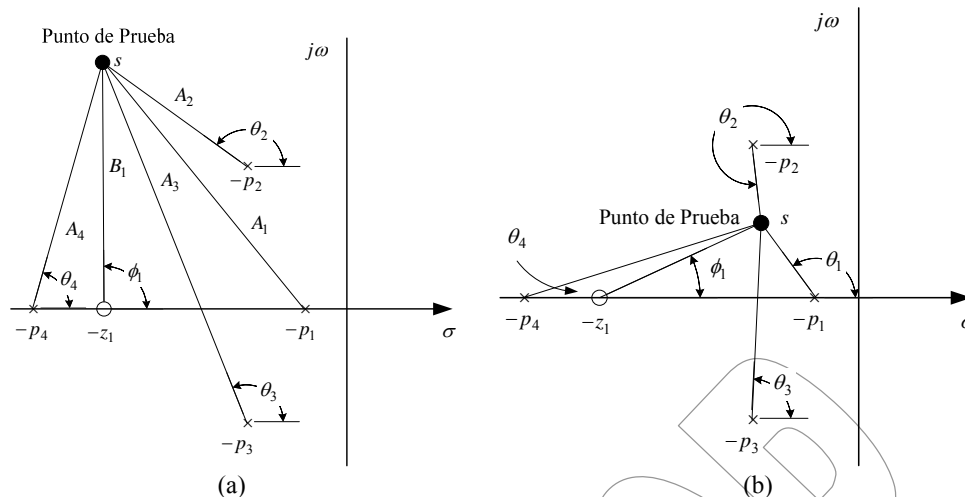
Por ejemplo si  $G(s)H(s)$  se obtiene mediante:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

En este caso,  $-p_2, -p_3$ , son polos complejos conjugados de  $G(s)H(s)$  es:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

En donde los ángulos  $\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se aprecia en la Figura 2(a) y 2(b).



**Figura 2. Diagramas que muestran la medición de ángulos de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba  $s$ .**

Mientras que la magnitud de la función de transferencia  $G(s)H(s)$  es

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

En donde  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $B_1$  son magnitudes de las cantidades complejas  $s+p_1, s+p_2, s+p_3, s+p_4$ , y  $s+z_1$ , respectivamente según la Figura 2(a).

Observe que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, siempre se ubican simétricamente con respecto al eje real, los lugares geométricos de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje. Por tanto, sólo es necesario construir la mitad superior de los lugares geométricos de las raíces y dibujar la imagen espejo de la mitad superior en el plano  $s$  inferior.

## Ejemplos

A continuación se presentarán dos ejemplos tomados del libro K. Ogata [1], para construir gráficas del lugar geométrico de las raíces.

Aunque los enfoques basados en computadora resultan muy sencillos para la construcción de los lugares geométricos de las raíces, aquí se usará el cálculo gráfico, combinado con una inspección, para determinar los lugares geométricos de las raíces en los que deben ubicarse las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Este enfoque gráfico ayudará a comprender mejor cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano complejo conforme los polos y los ceros en lazo abierto se mueven. Aunque sólo usaremos sistemas simples como ejemplo, el procedimiento para encontrar los lugares geométricos de las raíces no es más complicado para sistemas de orden superior.

El primer paso en el procedimiento para construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces es *buscar los lugares geométricos de las raíces posibles usando la condición de ángulo*. A continuación, si es necesario, se escala o se gradúa la escala de los lugares geométricos en la ganancia mediante la condición de magnitud.

Debido a que las mediciones gráficas de ángulos y magnitudes están implícitas en el análisis, se hace necesario usar las mismas divisiones en el eje de las abscisas y en el de las ordenadas, cuando se tracen los lugares geométricos de las raíces sobre papel para gráficas.

### Ejemplo 1. Tomado de K. Ogata [1]

Considere el sistema de la Figura 3, se supone que el valor de la ganancia  $K$  es no negativo.

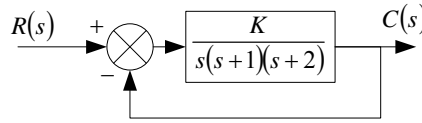


Figura 3. Sistema de control para el Ejemplo 1[1]

Para este sistema se tiene:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces y después se determinará el valor de  $K$  tal que el factor de amortiguamiento relativo  $\xi$  de los polos dominantes complejos conjugados en lazo abierto sea 0.5.

Para el sistema mostrado, la condición de ángulo se convierte en:

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \left[ \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right] \\ \angle G(s) &= -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) \\ &= \pm 180^\circ (2k+1), \quad \text{para } k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Un procedimiento común para trazar la gráfica del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

*Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.* El primer paso al construir una gráfica del lugar geométrico es ubicar los polos en lazo abierto,  $s = 0$ ,  $s = -1$  y  $s = -2$ , en el plano complejo. (En este sistema no hay ceros en lazo abierto.) Las ubicaciones de los polos en lazo abierto se señalan mediante cruces. (Se ha seleccionado las ubicaciones de los ceros en lazo abierto con círculos pequeños.) Observe que los puntos iniciales de los lugares geométricos de las raíces (los puntos que corresponden a  $K = 0$ ) son los polos en lazo abierto. Los lugares geométricos de raíces individuales para este sistema son tres, lo cual es igual al número de polos en lazo abierto. Para determinar los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real, se selecciona un punto de prueba,  $s$ . Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0$$

Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo. Por tanto, no hay un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real positivo. A continuación, se selecciona un punto de prueba sobre el eje real negativo entre 0 y -1. Así:

$$\begin{aligned} \angle s &= 180 \\ \angle(s+1) &= 0 \\ \angle(s+2) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -180$$

y se satisface la condición de ángulo. Así, la parte del eje real negativo entre 0 y -1 forma parte del lugar geométrico de las raíces. Si se selecciona un punto de prueba entre -1 y -2, entonces:

$$\begin{aligned} \angle s &= \angle(s+1) = 180 \\ \angle(s+2) &= 0 \end{aligned}$$

Y

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -360$$

Se observa que no se satisface la condición de ángulo. Por tanto, el eje real negativo de -1 a -2 no es parte del lugar geométrico de las raíces. Asimismo, si se ubica un punto de prueba sobre el eje real negativo de -2 a  $-\infty$ , se satisface la condición de ángulo. Por tanto, existen lugares geométricos de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y  $-\infty$ .

2. *Determine las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces.* Las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces, conforme  $s$  tiende a infinito, se determinan del modo siguiente: si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [G(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{K}{s^3} \right]$$

Y la condición de ángulo se convierte es:

$$-3\angle s = \pm 180^\circ (2k + 1), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

O bien,

$$\text{Angulo de Asintotas} = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{3} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme  $K$  varía, los ángulos distintos para las asíntotas se determinan como  $60^\circ$ ,  $-60^\circ$  y  $180^\circ$ . Por tanto, hay tres asíntotas. La única que tiene el ángulo de  $180^\circ$  es el eje real negativo. Antes de dibujar estas asíntotas en el plano complejo, se debe encontrar el punto en el cual intersectan el eje real. Dado que:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Si un punto de prueba se ubica lejos del origen,  $G(s)$  se escribe como:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \dots}$$

Dado que la ecuación característica es:

$$G(s) = -1$$

De tal modo, que la ecuación característica puede escribirse:

$$s^3 + 3s^2 + \dots = -K$$

Para un valor grande de  $s$ , esta última ecuación se aproxima mediante:

$$(s+1)^3 = 0$$

Si la básica de la intersección de las asintotas y el eje real se representa mediante  $s = -\sigma_a$ , entonces:

$$\sigma_a = -1$$

Y el punto de origen de las asintotas es  $(-1, 0)$ . Las asintotas son casi parte de los lugares geométricos de las raíces, en regiones muy lejanas al oriente.

3. *Determine el punto de ruptura o desprendimiento.* Para trazar con precisión los lugares geométricos de las raíces, debemos encontrar el punto de desprendimiento, a partir del cual las ramificaciones del lugar geométrico que se originan en los polos en 0 y -1 (conforme  $K$  aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre plano complejo. El punto de desprendimiento corresponde a un punto en el plano  $s$  en el cual ocurren raíces múltiples de la ecuación característica. Existe un método sencillo para encontrar el punto de desprendimiento y lo presentamos a continuación: escriba la ecuación característica como.

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0$$

En donde  $A(s)$  y  $B(s)$  no contienen  $K$ . Observe que  $f(s) = 0$ , tienen raíces múltiples en los puntos donde:

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Esto se observa del modo siguiente: supóngase que  $f(s)$  tiene raíces múltiples de un orden  $r$ . En este caso,  $f(s)$  se describe como:

$$f(s) = (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)$$

Si se deriva esta ecuación respecto a la variable  $s$ , y se establece  $s = s_1$ , se obtiene:

$$\left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$$

Esto significa que múltiples raíces de  $f(s)$ .

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0$$

en donde:

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \quad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

El valor específico de  $K$  que producirá raíces múltiples de la ecuación característica:

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Si sustituimos este valor de  $K$  en la ecuación, se obtiene:

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} = 0$$

o bien:

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0$$

Se obtiene:

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

y

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

Si  $dK/ds$  se hace igual a cero, obtenemos lo mismo que en la ecuación anterior. Por tanto, los puntos de desprendimiento se determinan sencillamente a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Dado que el punto de desprendimiento debe encontrarse sobre el lugar geométrico de las raíces entre 0 y -1, es evidente que  $s = -0.4226$  corresponde al punto de desprendimiento real. El punto  $s = -1.5774$  no está sobre el lugar geométrico de las raíces. Por tanto, no es un punto de desprendimiento o de ingreso real. De hecho, el cálculo de los valores de  $K$  que corresponden a  $s = -0.4226$  y  $s = 1.5774$  da por resultado

$$K = 0.3849, \quad \text{para } s = -0.4226$$

$$K = -0.3849, \quad \text{para } s = -1.5774$$

4. *Determine los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.* Estos puntos se encuentran mediante el criterio de estabilidad de Routh, del modo siguiente: dado que la ecuación característica para el sistema actual es:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de Routh se convierte en:

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & 3 & K \end{array}$$

El valor de  $K$  que iguala con cero el término  $s^1$  de la primera columna es  $K = 6$ . Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida del renglón  $s^2$ ; es decir,

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Lo cual produce,

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Las frecuencias en los puntos de cruce con el eje imaginario son, por tanto,  $\omega = \pm\sqrt{2}$ . El valor de ganancia que corresponde a los puntos de cruce es  $K = 6$ . Un enfoque alternativo es suponer que  $s = j\omega$  en la ecuación característica, igualar con cero tanto la parte imaginaria como la parte real y después despejar  $\omega$  y  $K$ . Para el sistema actual, la ecuación característica, con  $s = j\omega$ , es

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

O bien:

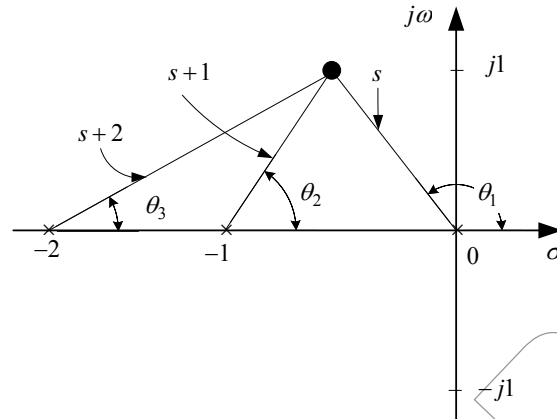
$$K - 3\omega^2 = 0 \quad \quad \quad 2\omega - \omega^3 = 0$$

A partir de lo cual,

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad \quad \quad K = 6 \quad \quad \quad \text{u} \quad \quad \quad \omega = 0 \quad \quad \quad K = 0$$

Por tanto, los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario en  $\omega = \pm\sqrt{2}$ , y el valor de  $K$  en los puntos de cruce es 6. Asimismo, una ramificación del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real tocará el eje imaginario en  $\omega = 0$ .

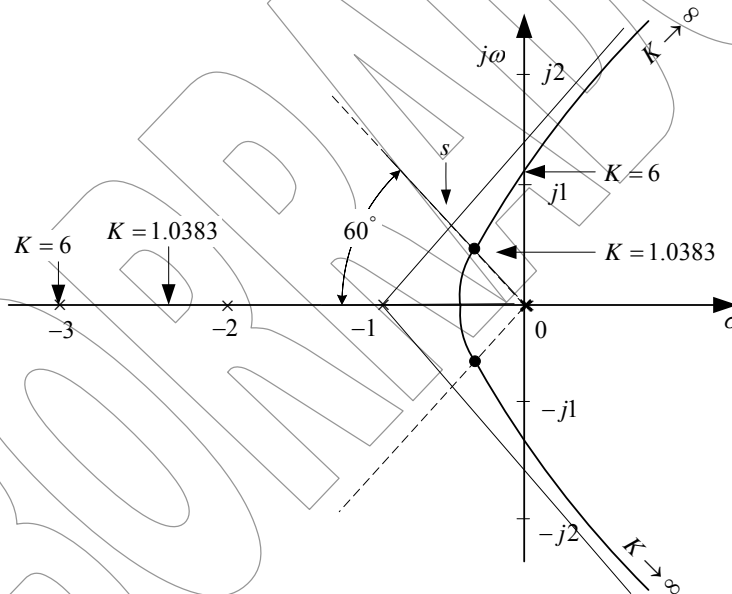
5. *Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje  $s = j\omega$  y el origen, como se muestra en la Figura 4, y aplique la condición de ángulo.*



**Figura 4. Construcción de un lugar geométrico de las raíces**

Si un punto de prueba está sobre los lugares geométricos de las raíces, la suma de los tres ángulos,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ , debe ser  $180^\circ$ . Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otro hasta que se cumpla tal condición. (La suma de los ángulos en el punto de prueba indicará en qué dirección debe moverse el punto de prueba.) Continúe este proceso y ubique una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

6. Dibuje los lugares geométricos de las raíces, con base en la información obtenida en los pasos anteriores, tal como se muestra en la Figura 5.



**Figura 5. Grafica del lugar geométrico de las raíces**

7. Determine un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  sea 0.5. Los polos en lazo cerrado con  $\zeta = 0.5$  se encuentran sobre las líneas que pasan por el origen y forman los ángulos  $\pm \cos^{-1} \zeta = \pm \cos^{-1} 0.5 = \pm 60^\circ$  con el eje real negativo. A partir de la Figura 5, tales polos en lazo cerrado con  $\zeta = 0.5$  se obtienen del modo siguiente:

$$s_1 = -0.3337 + j0.5780, \quad s_2 = -0.3337 - j$$

El valor de  $K$  que producen tales polos se encuentra a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.3337+j0.5780}$$

Usando este valor de  $K$ , el tercer polo se encuentra en  $s = -2.3326$ .

Observe que, a partir del paso 4, se aprecia que para  $K = 6$ , los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario en  $s = \pm j\sqrt{2}$ . Con este valor de  $K$ , el sistema exhibirá oscilaciones

sostenidas. Para  $K > 6$ , los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran en el semiplano derecho del plano  $s$ , produciendo un sistema inestable.

Por último, obsérvese que, si es necesario, se establece con facilidad la graduación de los lugares geométricos de las raíces en términos de  $K$  mediante la condición de magnitud. Sencillamente se selecciona un punto sobre un lugar geométrico de las raíces, se miden las magnitudes de las tres cantidades complejas  $s$ ,  $s + 1$  y  $s + 2$  y se multiplica estas magnitudes; el producto es igual al valor de la ganancia  $K$  en tal punto, o bien.

$$|s||s+1||s+2| = K$$

### Aplicando Matlab

```
>> syms s
>> den=s*(s+1)*(s+2)
den =

s*(s+1)*(s+2)

>> expand(den)
ans =
s^3+3*s^2+2*s

>> GH=tf([1],[1 3 2 0])

Transfer function:
      1
-----
s^3 + 3 s^2 + 2 s
>> rlocus(GH)
```

Finalmente el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema considerado, resulta:

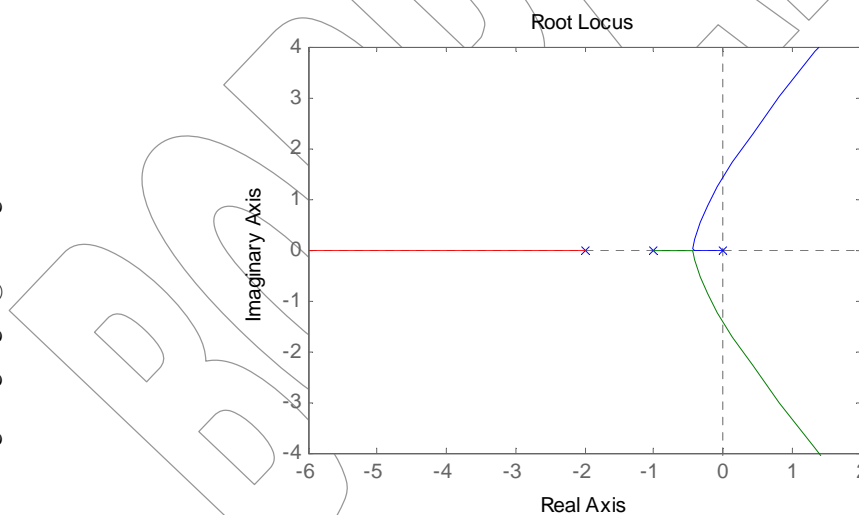


Figura 6. Grafica del lugar geométrico de las raíces, Trazado haciendo uso de Matlab

### Referencias Documentales

[1] Ogata, K., *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, 1980.

### Nota Especial

El autor quiere hacer del conocimiento público, que este documento no es inédito. Este documento es una adecuación en “cierta medida” del texto Ingeniería de Control Moderna de Katsuhiko Ogata. En cierta medida el autor lo que ha tratado de simplificar la redacción original. De igual modo, el autor desea hacer del conocimiento del lector que este documento no ha sido revisado por nadie, y es posible que contenga

errores. En cuyo caso, ante cualquier discrepancia cognitiva, por favor comunicarse con el autor. Las aportaciones del lector son de mucho interés para el autor, a fin de desarrollar un material de calidad y depurado para las futuras generaciones.

**Francisco M. González-Longatt**

BORRADOR

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento. Derechos de Autor Reservados.  
Copyright © 2007. Francisco M. González-Longatt. [fglongatt@ieec.org](mailto:fglongatt@ieec.org)