

ELC-33103
Teoría de Control



Anexo 1.2
Modelación Matemática de
Sistemas Físicos

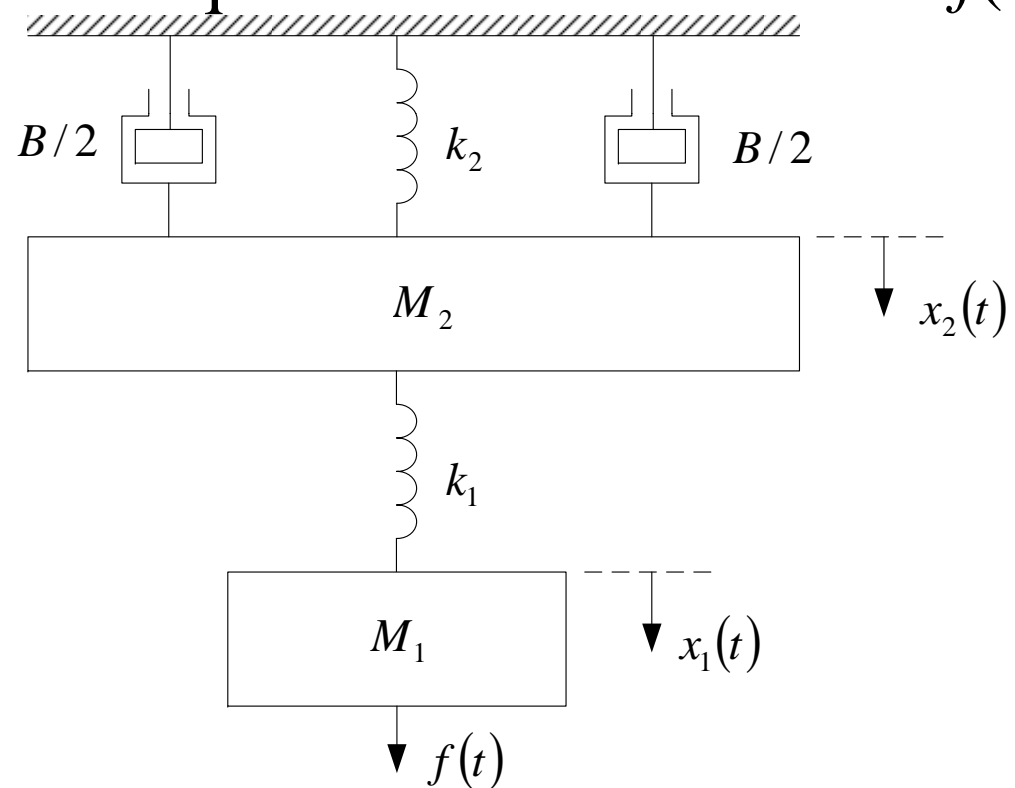
Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt

fglongatt@ieee.org

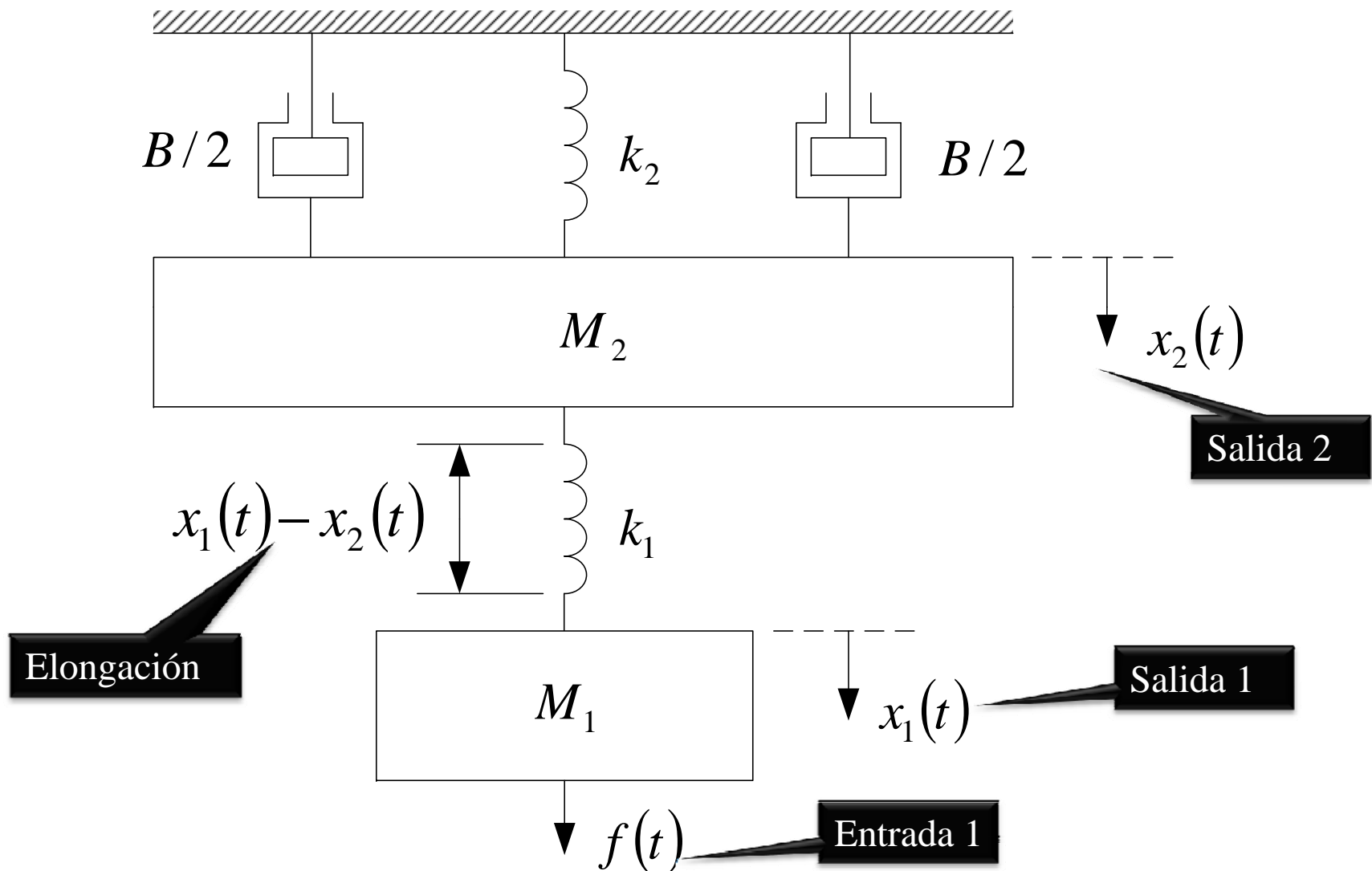
<http://www.giaelec.org/fglongatt/TeoriaControlI.html>

1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Obtener un *modelo dinámico* para el sistema de fuerzas trasnacional en al dirección vertical que se muestra considerando que la entrada fuerza $f(t)$, Salidas $x_1(t)$ $x_2(t)$



1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

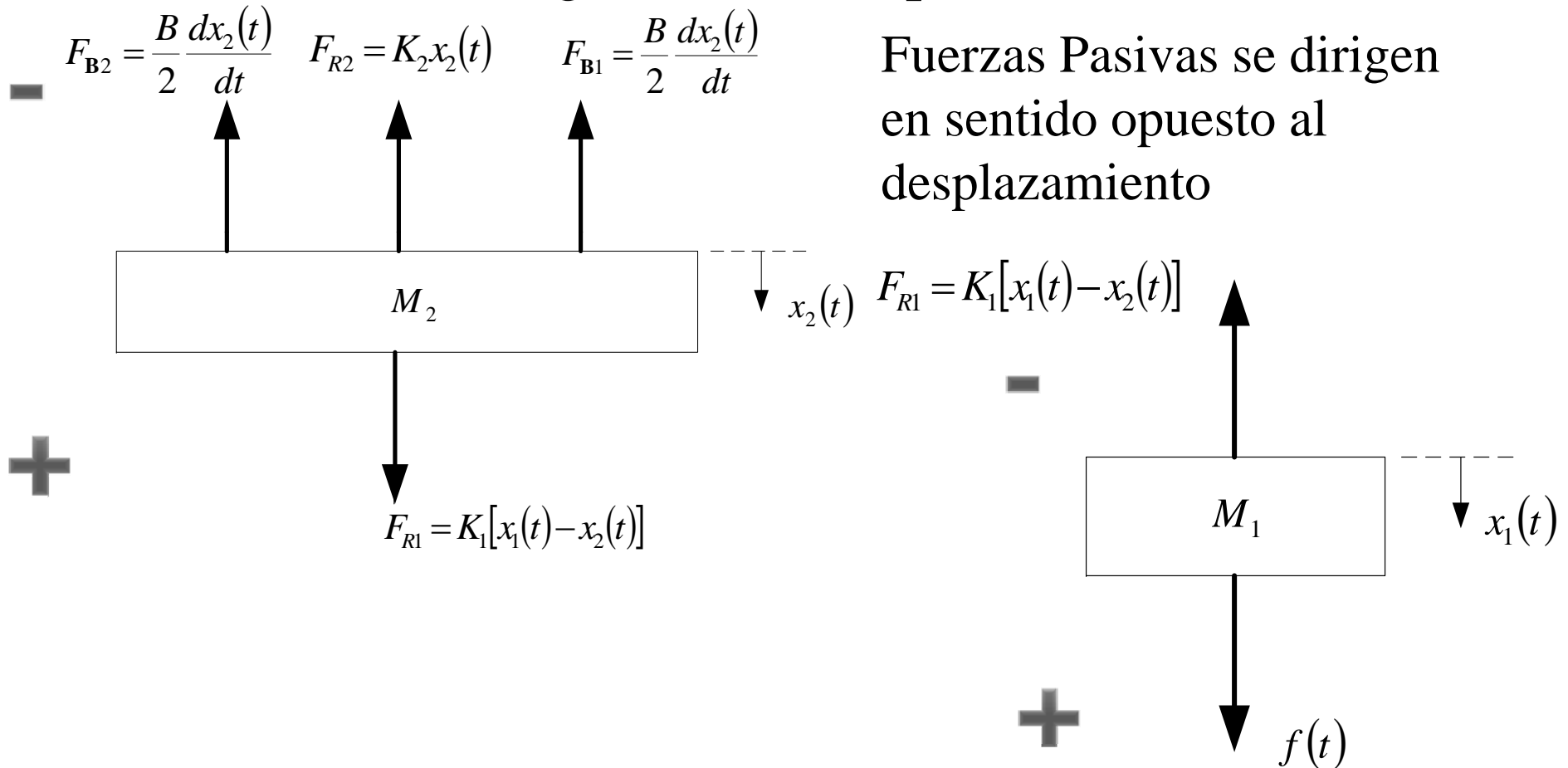


1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Con las posiciones de referencia determinadas tal como se ha especificado.
- Un desplazamiento inicial del resorte superior produce una fuerza igual y opuesta a $M_1g + M_2g$.
- Y un desplazamiento inicial del resorte inferior produce una fuerza que compensa M_1g .

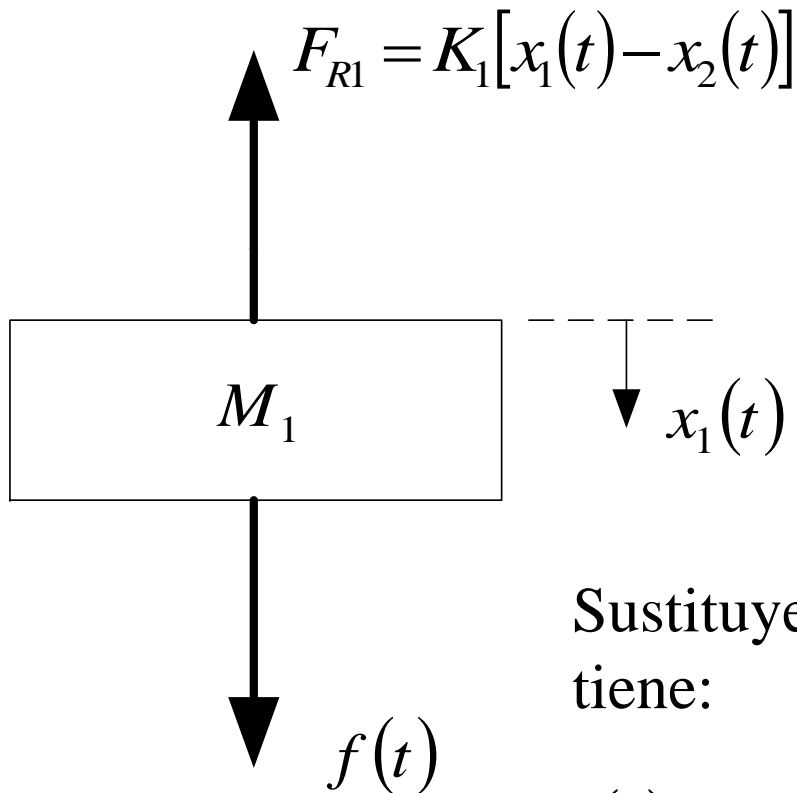
1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Se efectúa un diagrama de cuerpo libre:



1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Del cuerpo M_1 se tiene:



Aplicando la 2da Ley de Newton:

$$f(t) = M_1 a_1 + F_{R1}$$

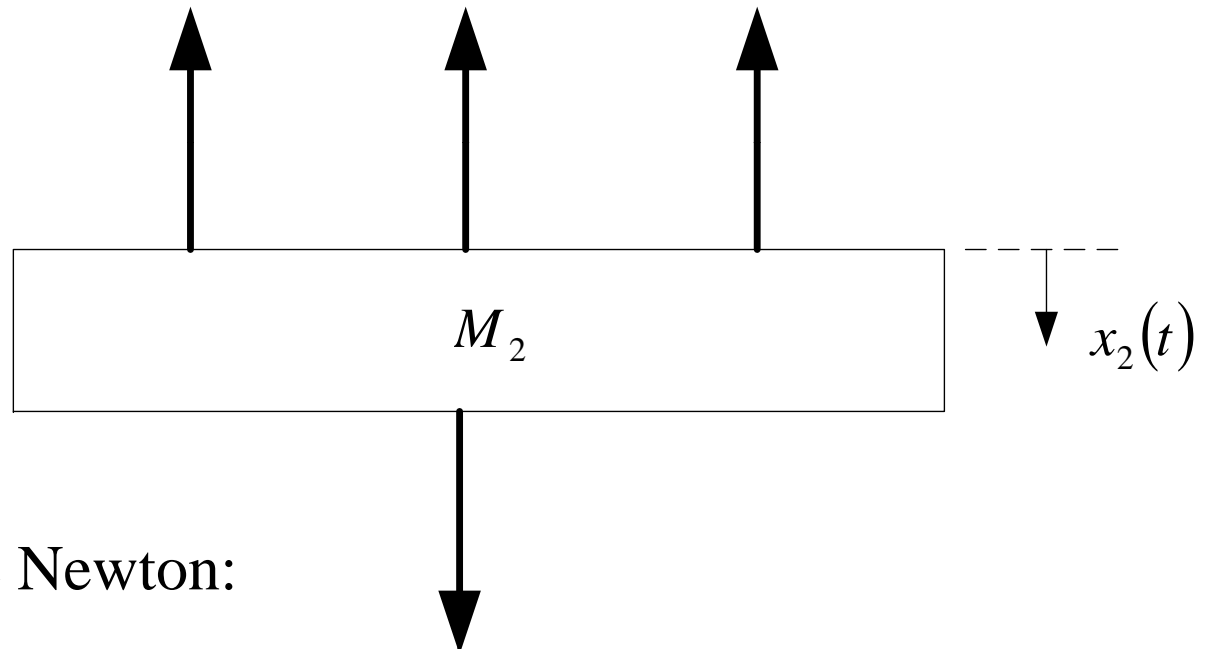
Sustituyendo las respectivas fuerzas se tiene:

$$f(t) = M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1 [x_1(t) - x_2(t)]$$

1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- Del cuerpo M_2 se tiene:

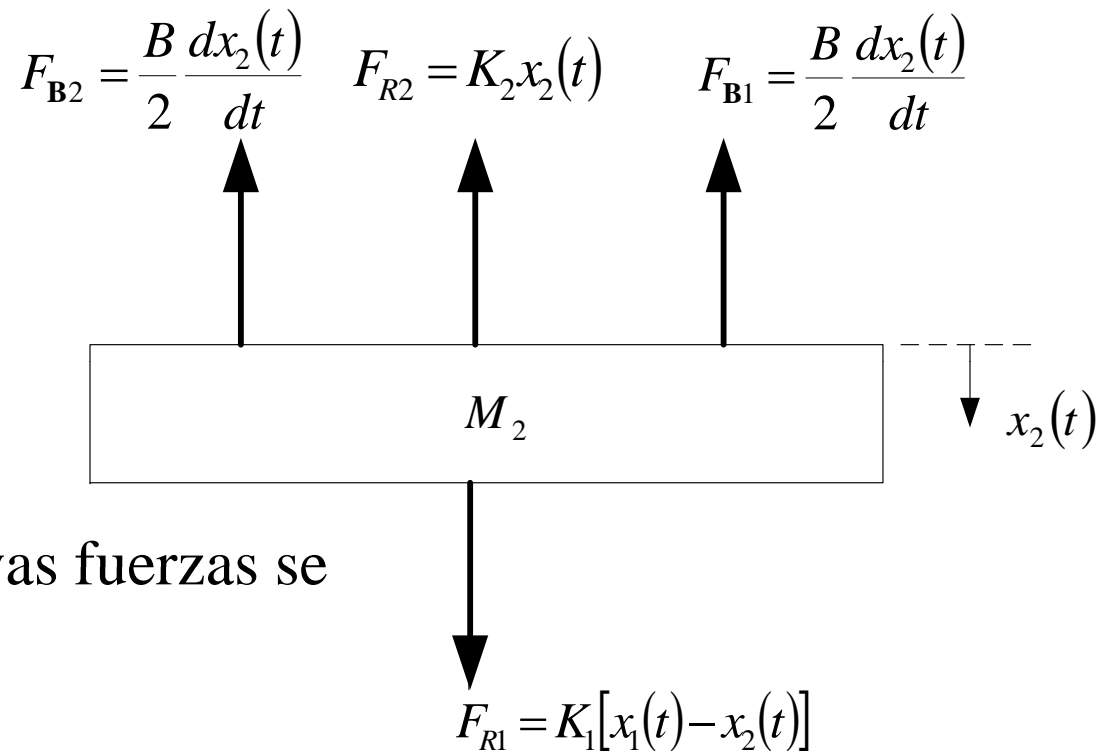
$$F_{B2} = \frac{B}{2} \frac{dx_2(t)}{dt} \quad F_{R2} = K_2 x_2(t) \quad F_{B1} = \frac{B}{2} \frac{dx_2(t)}{dt}$$



Aplicando la 2da Ley de Newton:

$$0 = M_2 a_2 + F_{R2} + F_{B1} + F_{B2} - F_{R1} \quad F_{R1} = K_1 [x_1(t) - x_2(t)]$$

1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos



Sustituyendo las respectivas fuerzas se tiene:

$$0 = M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - K_1 [x_1(t) - x_2(t)] + K_2 x_2(t) + B \frac{dx(t)}{dt}$$

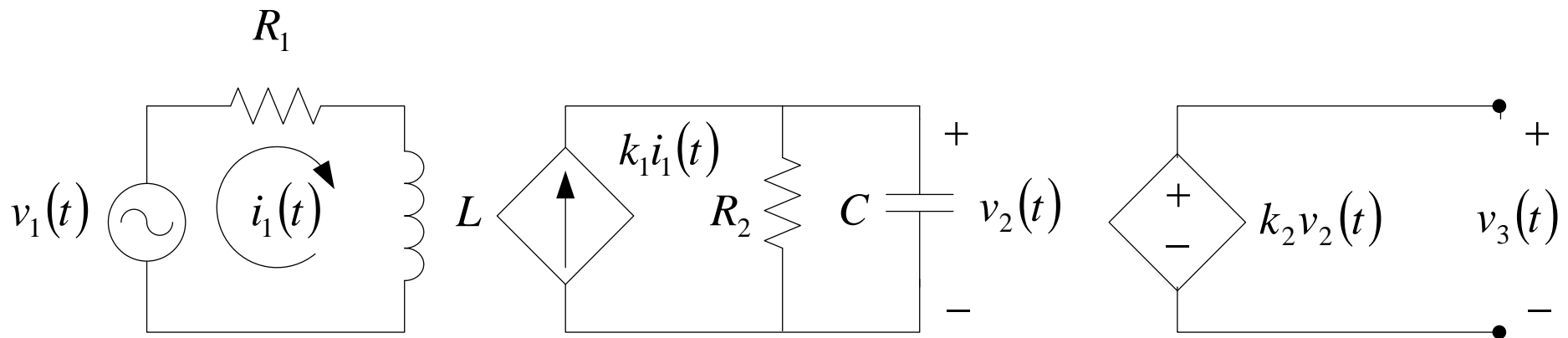
1. Modelo Matemático de Sistemas Físicos

- El modelo dinámico del sistema queda dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - K_1 [x_1(t) - x_2(t)] + K_2 x_2(t) + B \frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \\ M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1 [x_1(t) - x_2(t)] = f(t) \end{cases}$$

2. Función de Transferencia

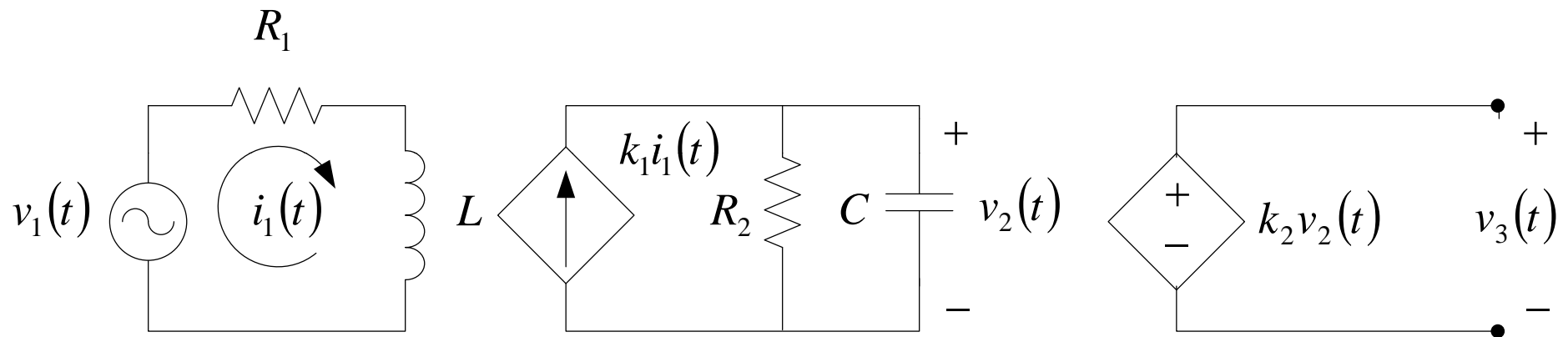
- Para la combinación de circuitos con fuentes dependientes, tal y como se muestra en la siguiente Figura.



- Determinar la función de transferencia $V_3(s)/V_1(s)$.

2. Función de Transferencia

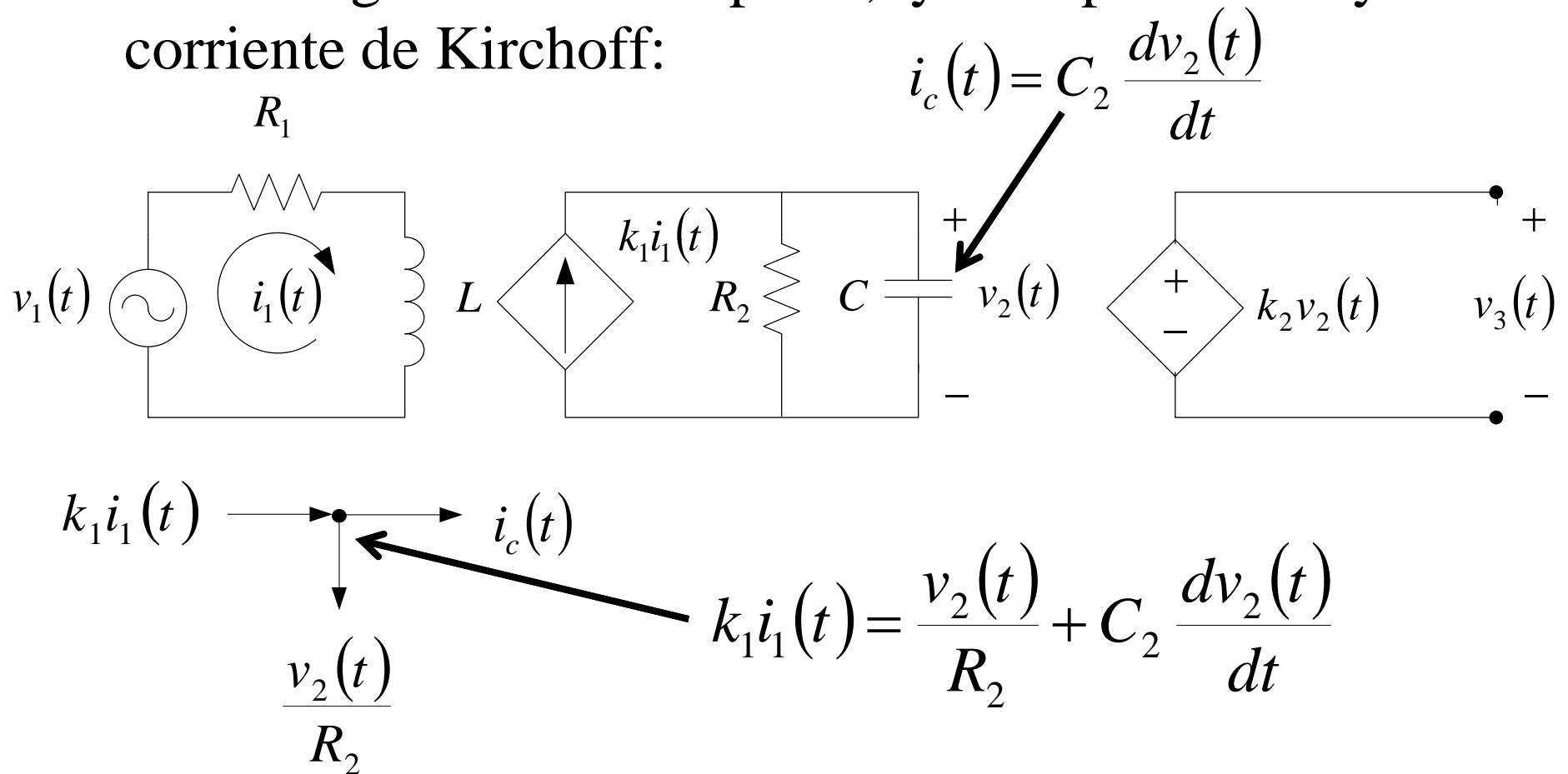
- Se procede a establecer las ecuaciones circuitales que definen la mala de la entrada



$$v_{in}(t) = R_1 i(t) + L \frac{di_1(t)}{dt}$$

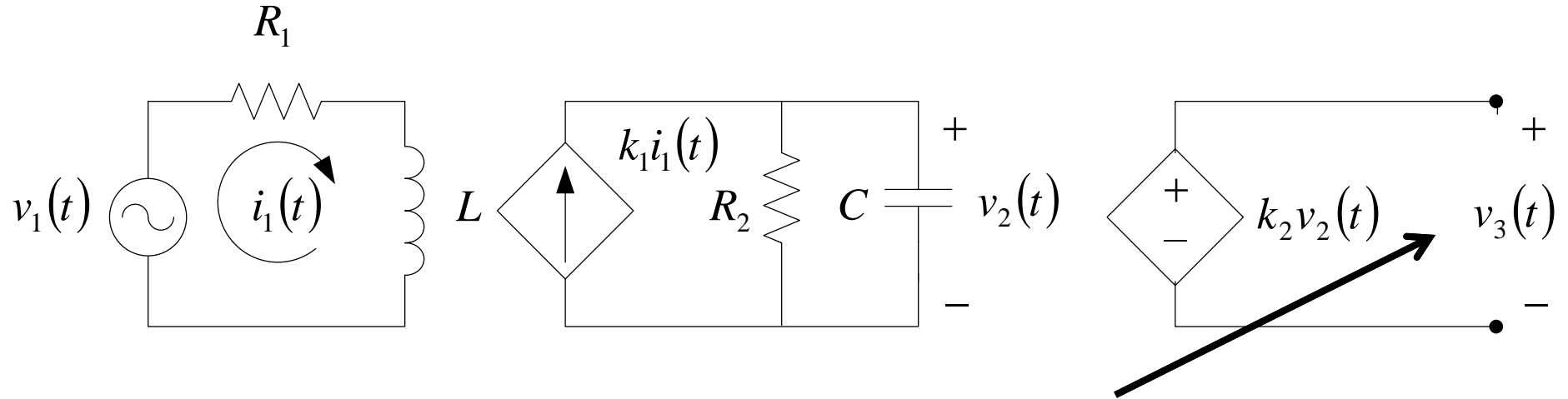
2. Función de Transferencia

- En la segunda red acoplada, y se aplica la ley de corriente de Kirchoff:



2. Función de Transferencia

- De la tercera malla se tiene:



$$v_{out}(t) = k_2 v_2(t)$$

2. Función de Transferencia

- El modelo dinámico del circuito resulta ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 i_1(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \\ v_{out}(t) = k_2 v_2(t) \\ v_{in}(t) = R_1 i(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} \end{array} \right.$$

- Se procede a aplicar transformada de Laplace en ambos lados de cada ecuación, considerando las condiciones iniciales nulas.

2. Función de Transferencia

- Aplicando transformada de Laplace resulta:

$$\left[\begin{array}{l} v_{in}(t) = R_1 i(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} \\ k_1 i_1(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \\ v_{out}(t) = k_2 v_2(t) \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} V_{in}(s) = R_1 I_1(s) + sLI_1(s) \\ k_1 I_1(s) = \frac{V_2(s)}{R_2} + sC_2 V_2(s) \\ V_{out}(s) = k_2 V_2(s) \end{array} \right]$$

2. Función de Transferencia

- Se despeja I_1 :

$$I_1(s) = \frac{V_{in}(s)}{R_1 + sL} \quad \Rightarrow \quad k_1 I_1(s) = \frac{V_2(s)}{R_2} + sC_2 V_2(s)$$

$$k_1 \frac{V_{in}(s)}{R_1 + sL} = V_2(s) \left[\frac{1}{R_2} + sC_2 \right]$$

- Se opera matemáticamente:

$$V_{out} = \frac{k_2 R_2 k_1 V_{in}(s)}{(R_1 + sL)(1 + sR_2 C_2)}$$

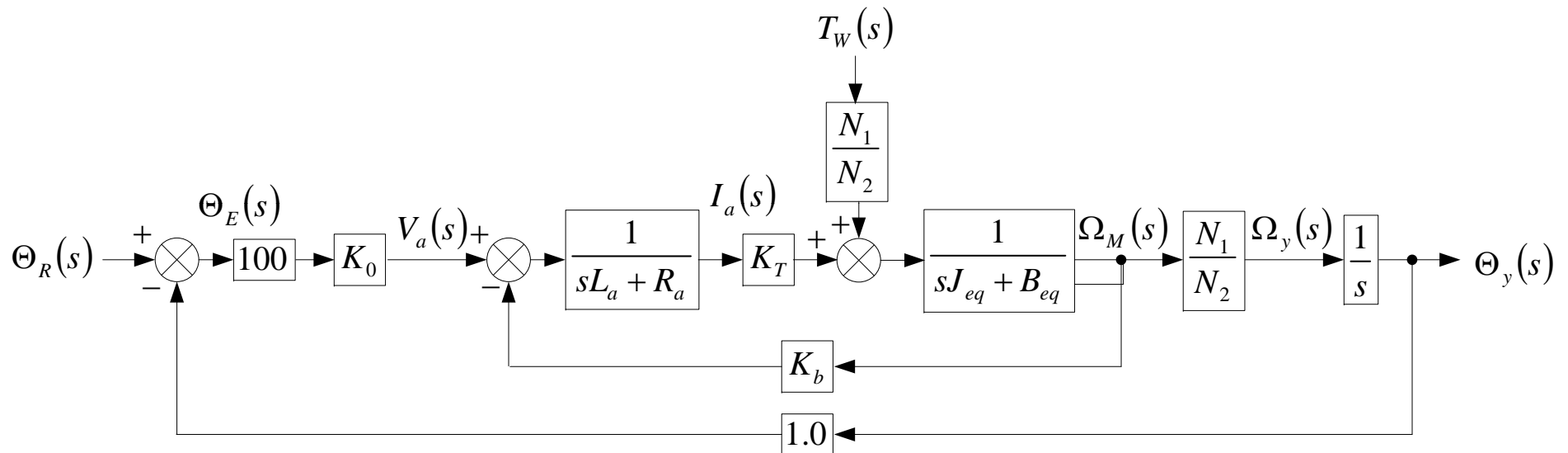
2. Función de Transferencia

- Finalmente la función de transferencia resulta:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{k_2 R_2 k_1}{(R_1 + sL)(1 + sR_2 C_2)}$$

3. Función de Transferencia

- Para el sistema de control mostrado en la Figura.



- Determine la representación en ecuación de estado

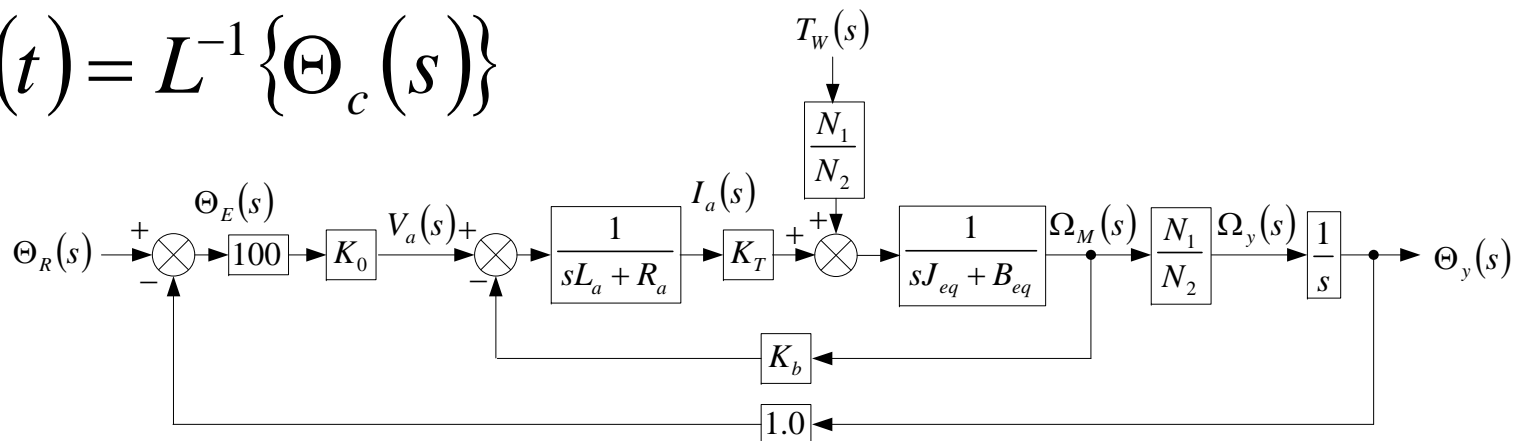
3. Función de Transferencia

- Para determinar la representación de estado del sistema se tiene que la entrada $\theta_R(t)$ y salida $\theta_y(t)$.
- Para las variables intermedias se tiene:

$$v_a(t) = L^{-1} \{V_a(s)\} \quad i_a(t) = L^{-1} \{I_a(s)\}$$

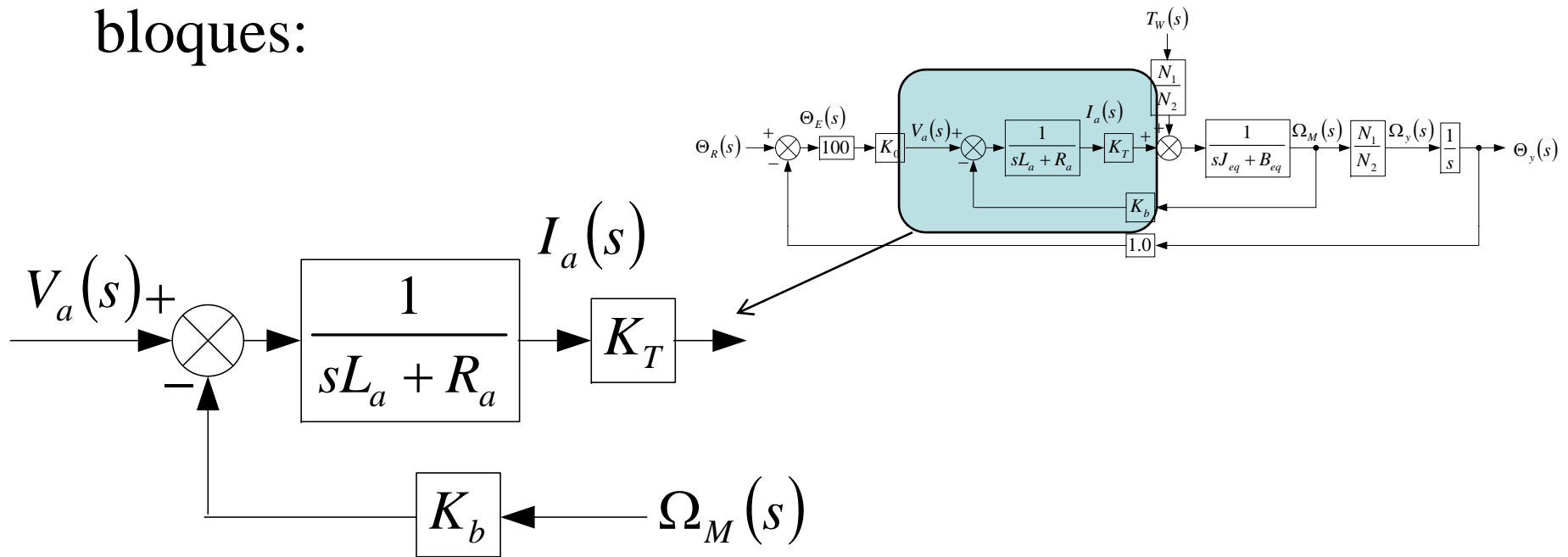
$$\omega_m(t) = L^{-1} \{\Omega_M(s)\} \quad \omega_y(t) = L^{-1} \{\Omega_y(s)\}$$

$$\theta_c(t) = L^{-1} \{\Theta_c(s)\}$$



3. Función de Transferencia

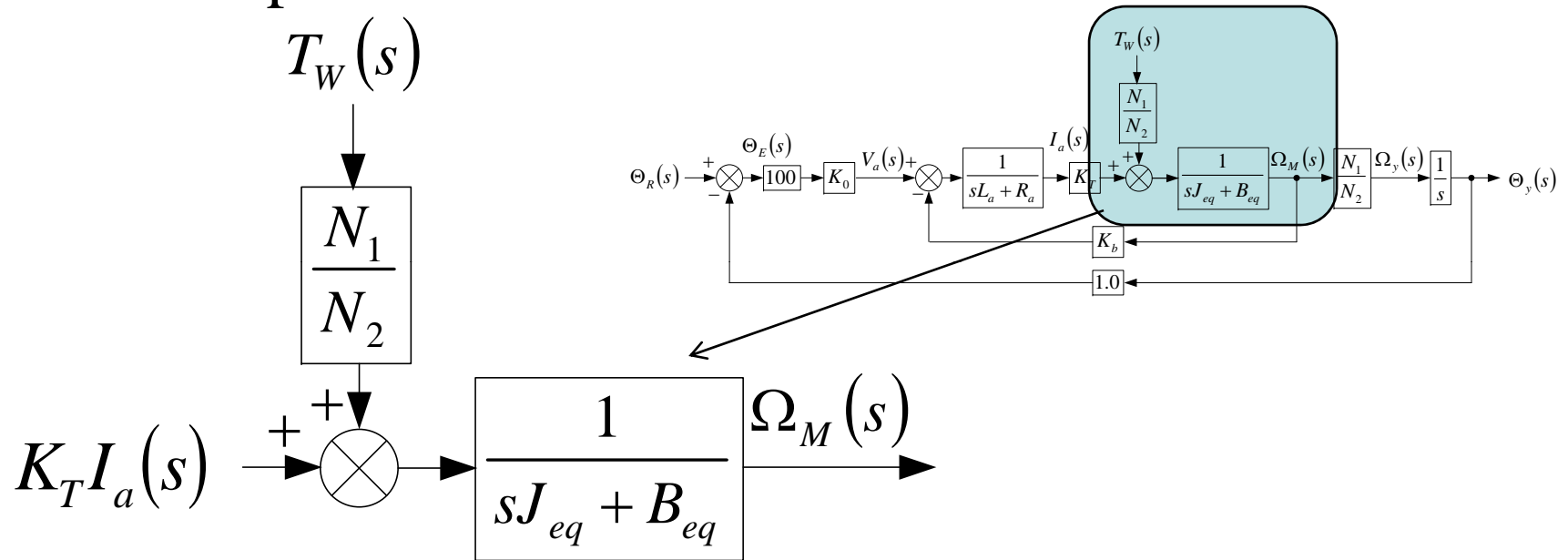
- Tomando en cuenta esta sección del diagrama de bloques:



$$v_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega_m(t)$$

3. Función de Transferencia

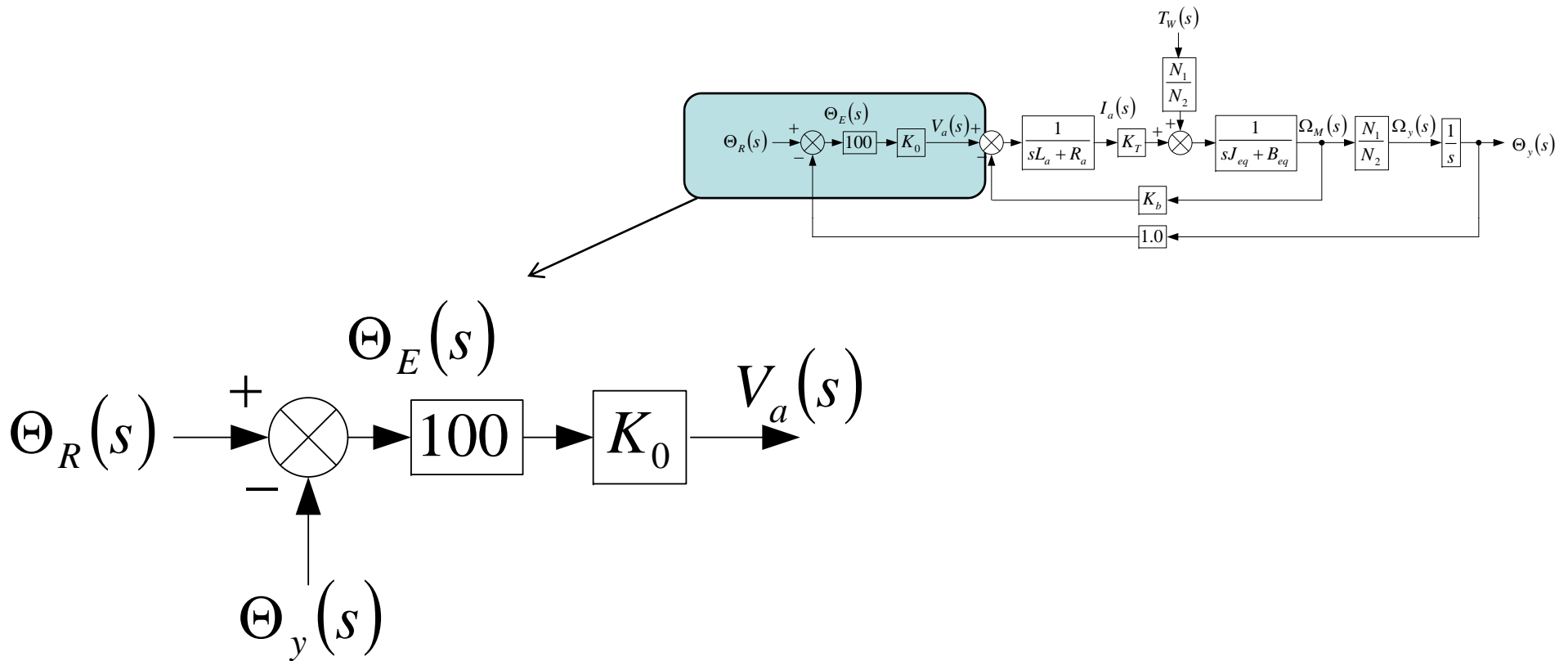
- Para otra porción del sistema resulta:



$$K_T i_a(t) + \frac{N_1}{N_2} T_W(t) = J_{EQ} \frac{d\omega_m}{dt} + B_{EQ} \omega_m$$

3. Función de Transferencia

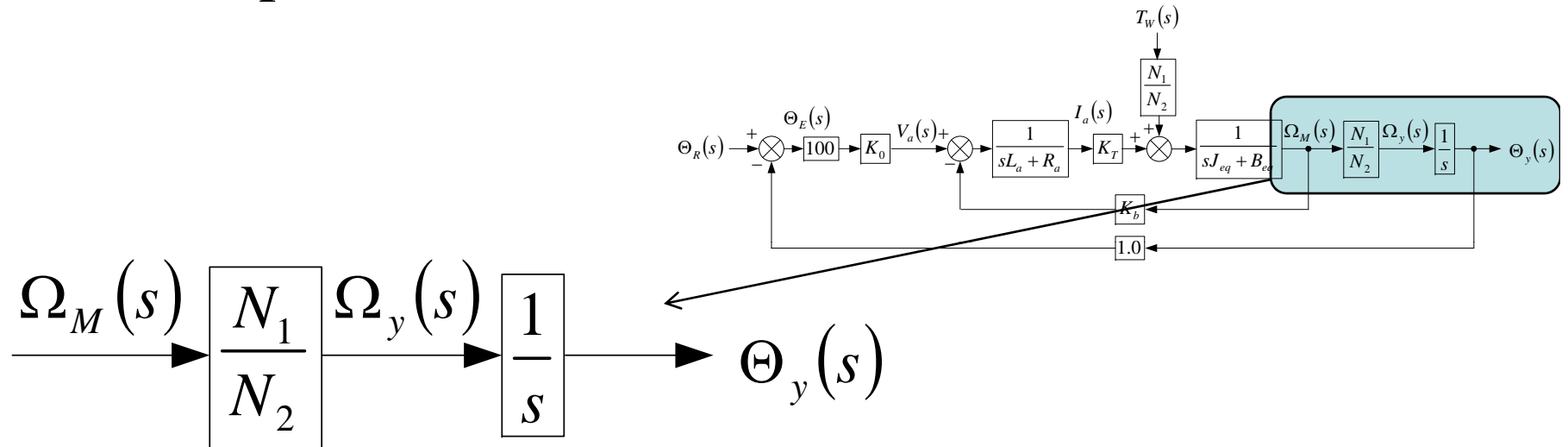
- Para la parte de la entrada se tiene:



$$v_a(t) = 100K_0 [\theta_r(t) - \theta_y(t)]$$

3. Función de Transferencia

- Para la parte de la salida:



$$\omega_m(t) = \frac{N_1}{N_2} \frac{d\theta_y}{dt}$$

3. Función de Transferencia

- Finalmente el conjunto de ecuaciones que definen la dinámica son:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega_m(t) \\ K_T i_a(t) + \frac{N_1}{N_2} T_W(t) = J_{EQ} \frac{d\omega_m}{dt} + B_{EQ} \omega_m \\ \omega_m(t) = \frac{N_1}{N_2} \frac{d\theta_y}{dt} \end{array} \right.$$

$$v_a(t) = 100K_0 [\theta_r(t) - \theta_y(t)]$$

3. Función de Transferencia

- Se construye la presentación de modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{100k_o}{L_a} \\ \frac{K_T}{J_{EQ}} & -\frac{B_{EQ}}{J_{EQ}} & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{100k_o}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{N_2 J_{EQ}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ T_W \end{bmatrix}$$

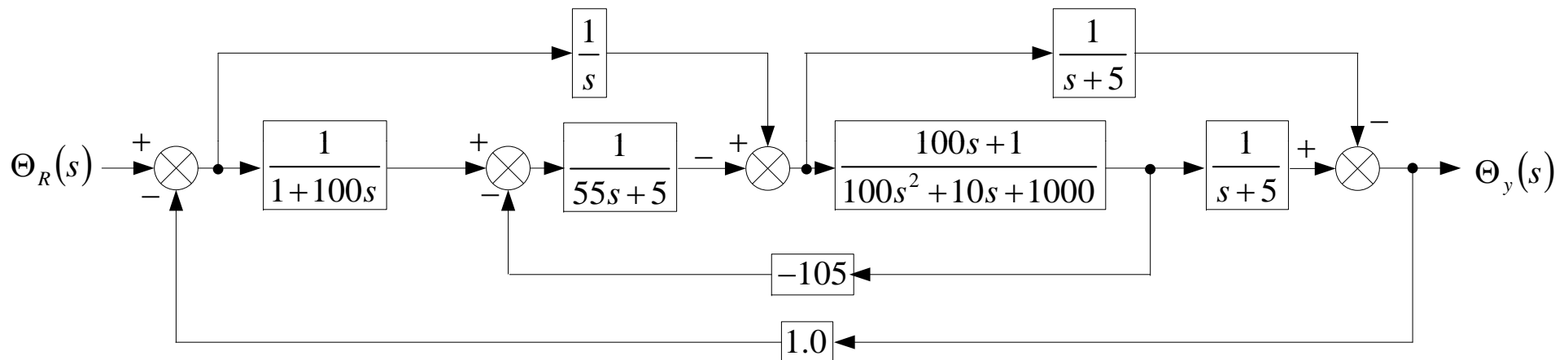
3. Función de Transferencia

- Las ecuaciones algebraicas resultan ser:

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{N_1}{N_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ T_W \end{bmatrix}$$

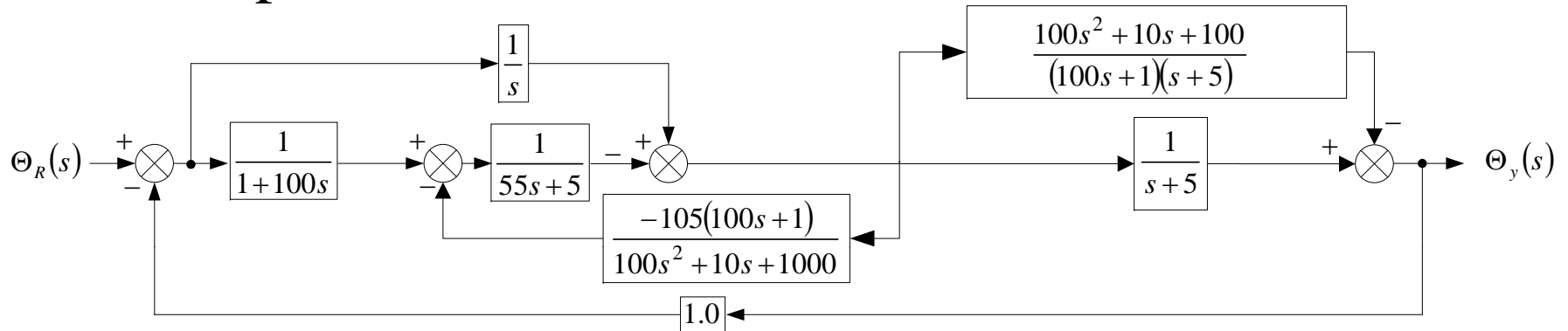
4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Determine el diagrama de bloque equivalente reducido del siguiente sistema.

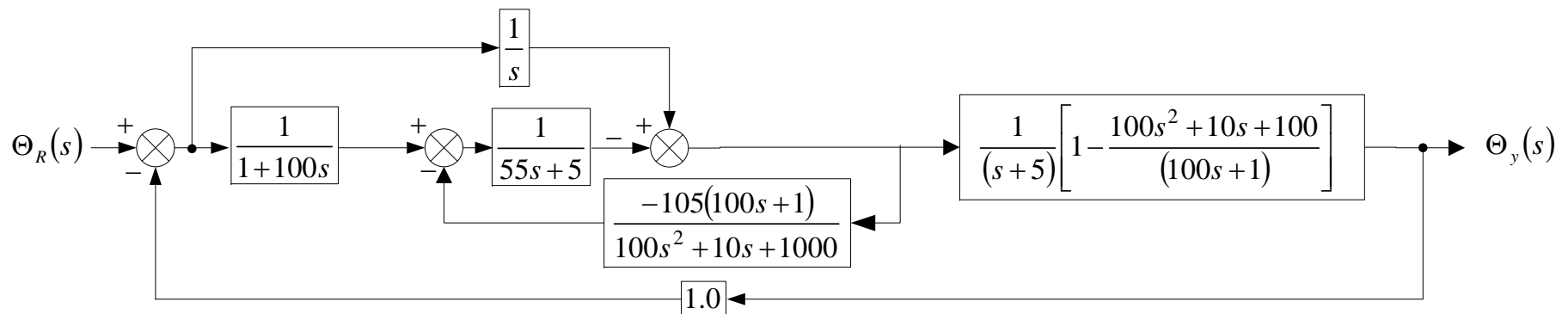


4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Se simplifica otra cascada.

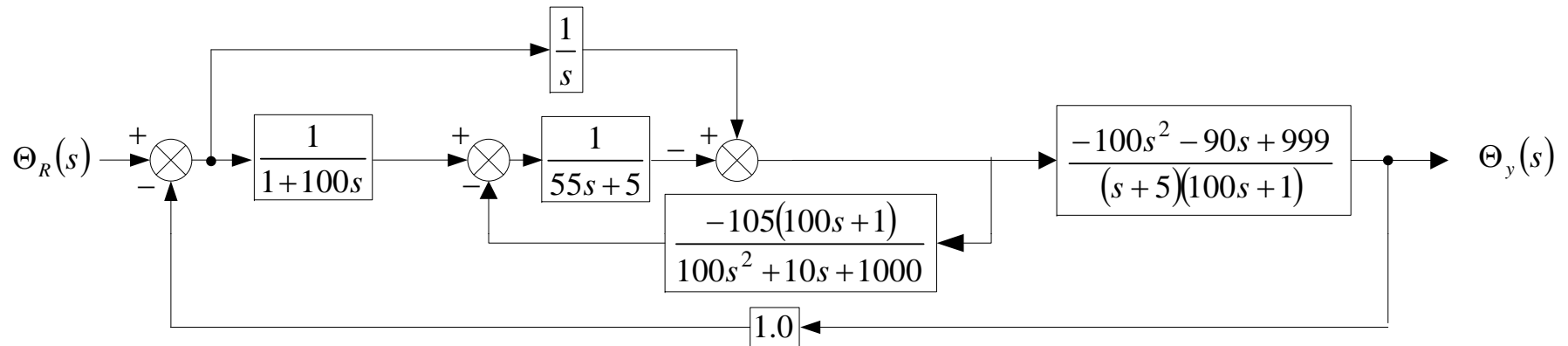


- Se simplifica la sumatoria



4. Reducción de Diagrama de Bloques

- Afectando sumas y simplificando:



- Finalmente resulta:

$$\Theta_R(s) \rightarrow \frac{(-20s^2 - 2s - 200)(554s + 5500s^2 + 5)(100s^2 - 90s + 999)}{11000000s^7 + 45520000s^6 + 146339100s^5 + 442042430s^4 + 90179752s^3 - 1089947161s^2 - 110608085s - 999000} \rightarrow \Theta_y(s)$$