

ELC-33103
Teoría de Control

Anexo 3.4

Respuesta en Frecuencia:
Filtros

Prof. Francisco M. Gonzalez-Longatt

fglongatt@ieee.org

<http://www.giaelec.org/fglongatt/SP.htm>

1. Ejemplo

- Como se mencionó anteriormente, el diagrama de Bode es una representación de la magnitud y la fase de (en el que el vector de frecuencias w sólo contiene frecuencias positivas).
- Para obtener el diagrama de Bode de una función de transferencia, se puede usar la función bode de Matlab[®].
- Por ejemplo:

```
>> bode(50, [1 9 30 40])
```

1. Ejemplo

- Por ejemplo:

```
>> bode(50, [1 9 30 40])
```

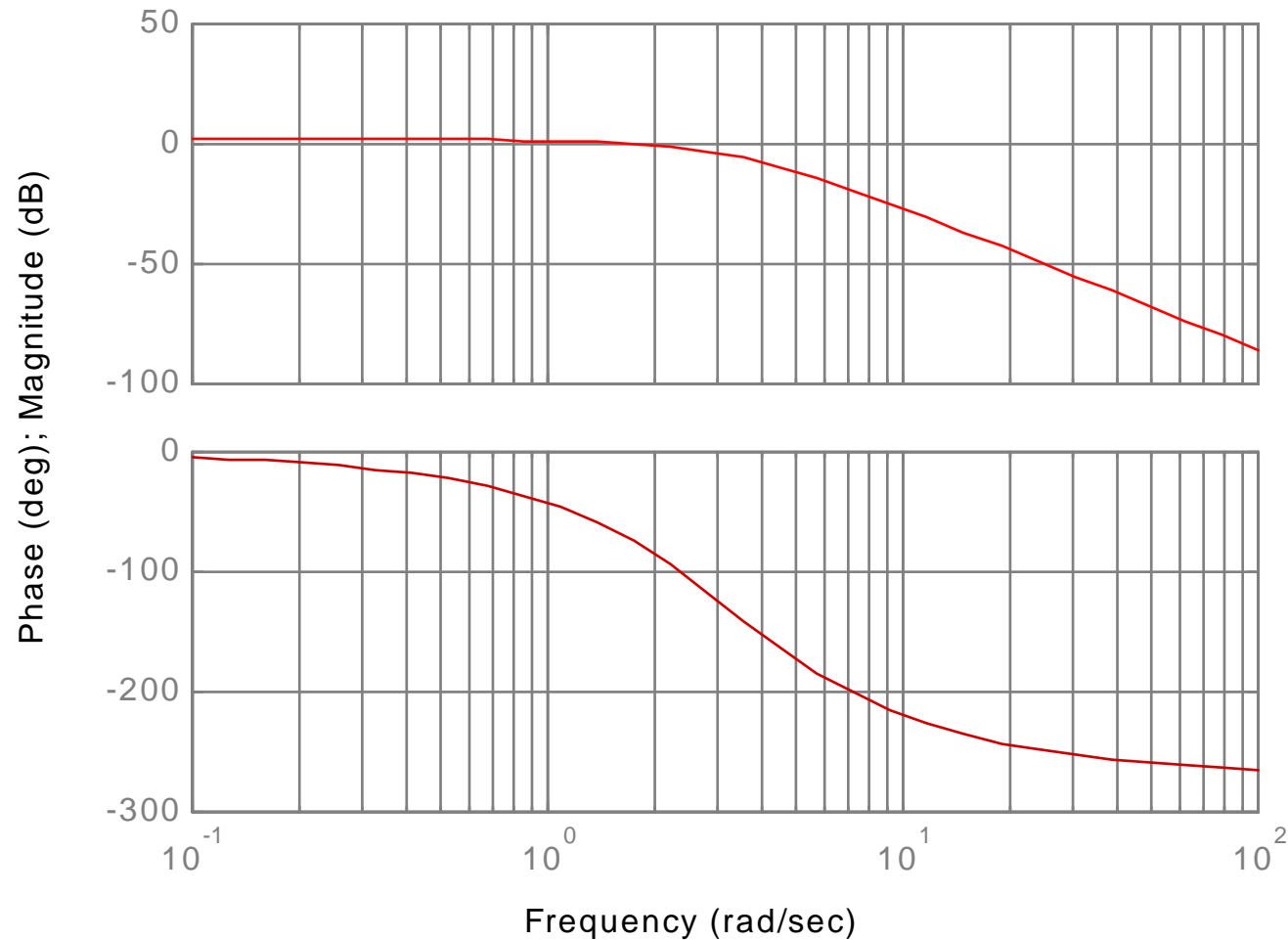
- Muestra el diagrama de Bode de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{50}{s^3 + 9s^2 + 30s + 40}$$

1. Ejemplo

Bode Diagrams

$$G(s) = \frac{50}{s^3 + 9s^2 + 30s + 40}$$



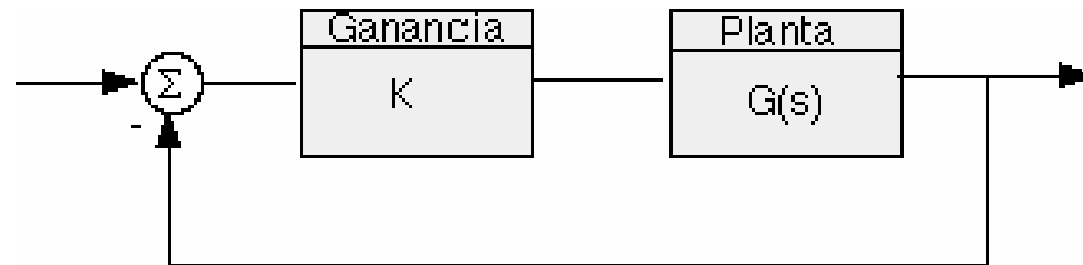
1. Ejemplo

- Observe los ejes de la gráfica. La frecuencia se expresa en escala logarítmica, la fase en grados y la magnitud en decibelios.

$$1dBel = 20Log_{10}(|G(j\omega)|)$$

2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

- Supóngase que se tiene el siguiente sistema:



- donde K es una ganancia variable (constante) y $G(s)$ es la planta en consideración.
- El *margen de ganancia* se define como el cambio requerido en la ganancia de bucle abierto para llevar al sistema a la inestabilidad.

2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

- Sistemas con *márgenes de ganancia grande pueden soportar grandes cambios en los parámetros del sistema antes de alcanzar la inestabilidad en bucle cerrado.*
- Tenga en cuenta que *una ganancia unitaria en magnitud equivale a cero dB.*

2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

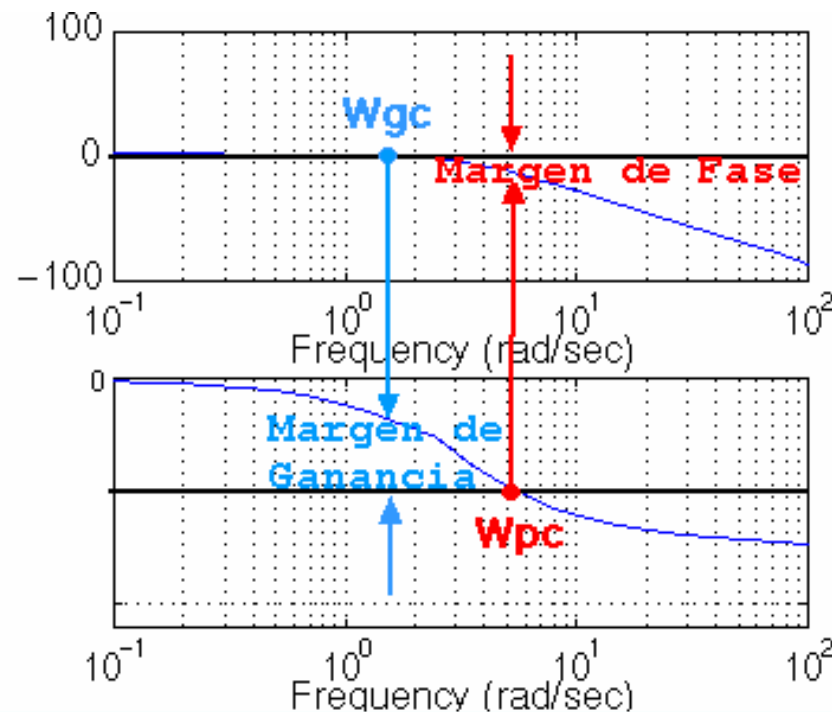
- El *margen de fase* se define como el cambio en el desplazamiento de fase en bucle abierto necesario para que el sistema de bucle cerrado se haga inestable.
- El margen de fase también mide la tolerancia del sistema a un retraso en el tiempo.

2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

- Si se produce un retraso mayor que $180/\omega_{pc}$ en el bucle (donde es la frecuencia a la que el desplazamiento de fase es 180°), el sistema será inestable en bucle cerrado.
- Este retraso temporal puede verse como un bloque adicional en la línea directa del diagrama de bloques que añade fase al sistema sin alterar la magnitud.
- Un retraso en el tiempo se puede expresar como un bloque con magnitud unitaria y una fase de ω^* retraso (en radianes/segundo).

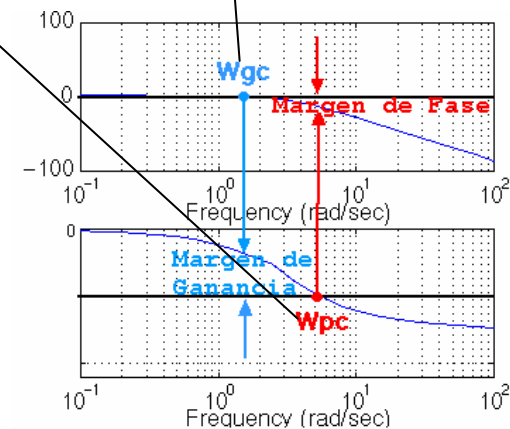
2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

- Por ahora, *no se tendrá mayor procuración de donde viene todo esto y solo se hará énfasis en identificar los valores de los márgenes de ganancia y fase en un diagrama de Bode:*



2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

- El *margen de fase* es la diferencia en fase entre la curva de fase y -180° en el punto correspondiente a la frecuencia que nos proporciona una ganancia de 0 dB (*frecuencia de corte de la ganancia, ω_{gc}*).
- El *margen de ganancia* es la diferencia entre la curva de magnitud y 0 dB en el punto correspondiente a la frecuencia que nos proporciona una fase de -180° (*frecuencia de corte de fase, ω_{pc}*).



2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

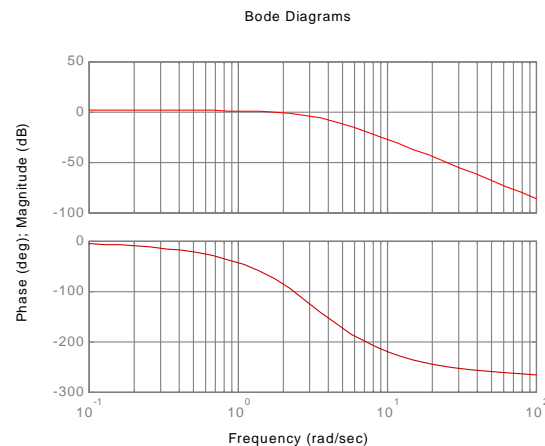
- El margen de fase tiene la ventaja de que no es necesario volver a trazar el diagrama de Bode para calcularlo cuando se varía la ganancia.
- Ya que añadir ganancia sólo implica elevar la gráfica de magnitud.
- Lo que equivale a desplazar el eje de la gráfica de magnitud.
- Hallar el margen de fase es sencillamente encontrar la nueva frecuencia de corte y leer el nuevo margen a esa frecuencia.

3. Ejemplo

- Por ejemplo, suponga que se ha introducido la función bode (50 , [1 9 30 40]) .

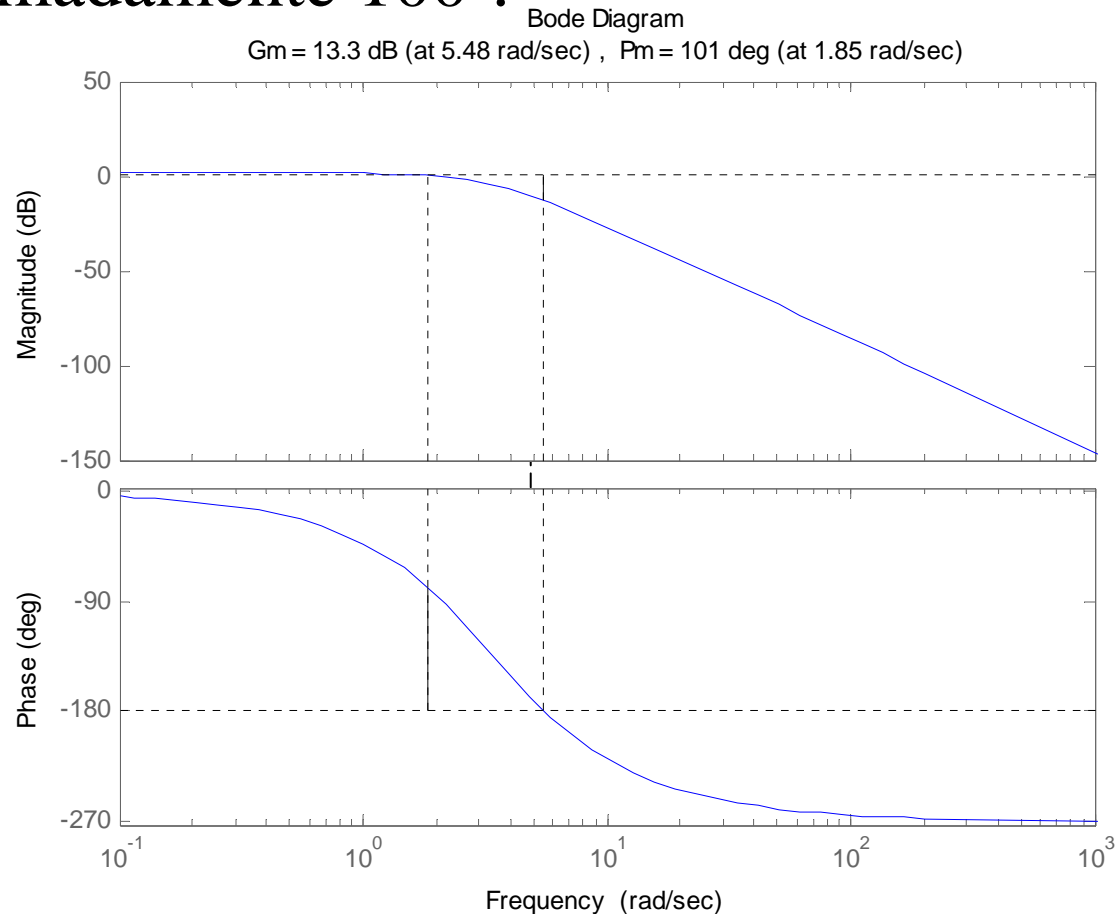
$$P(s) = \frac{50}{s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 40}$$

- Y se ha obtenido la siguiente gráfica



3. Ejemplo

- Se puede ver que el margen de fase es aproximadamente 100° .

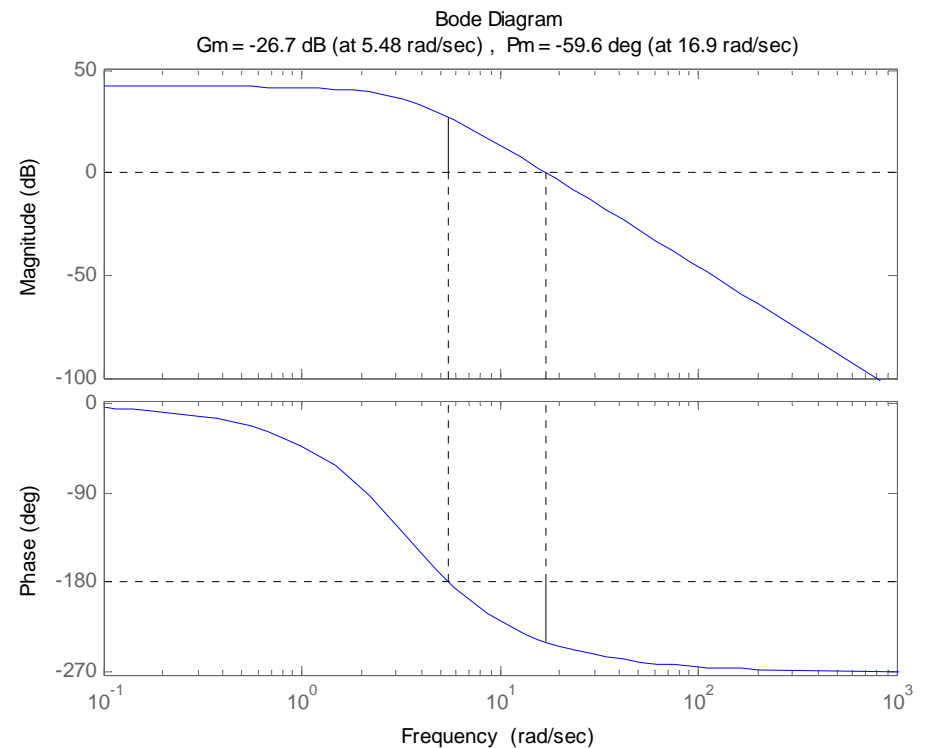
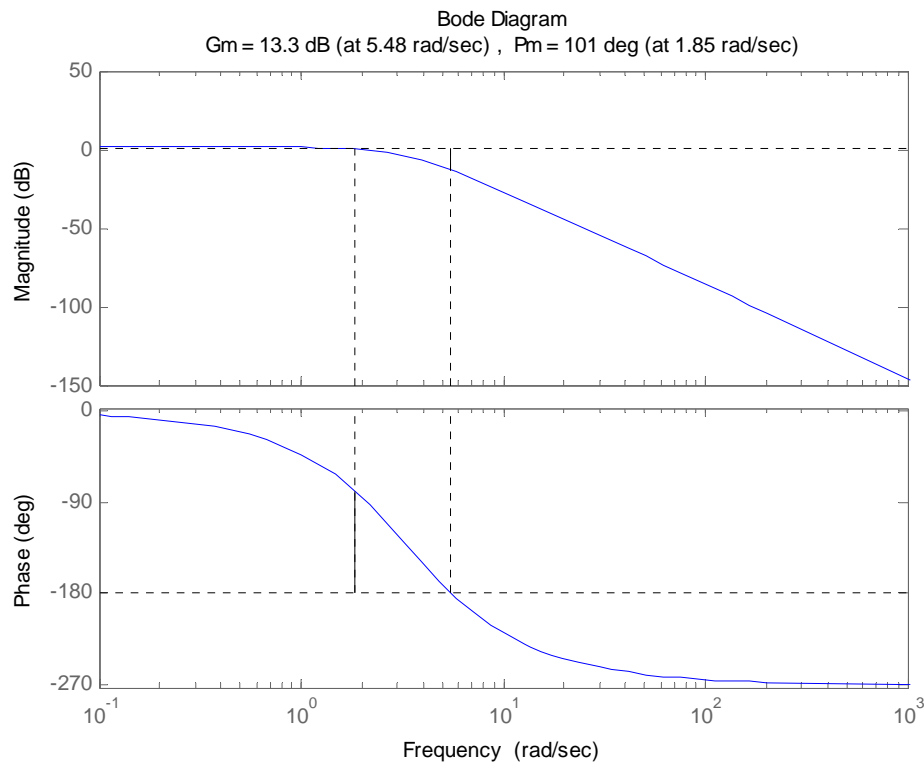


3. Ejemplo

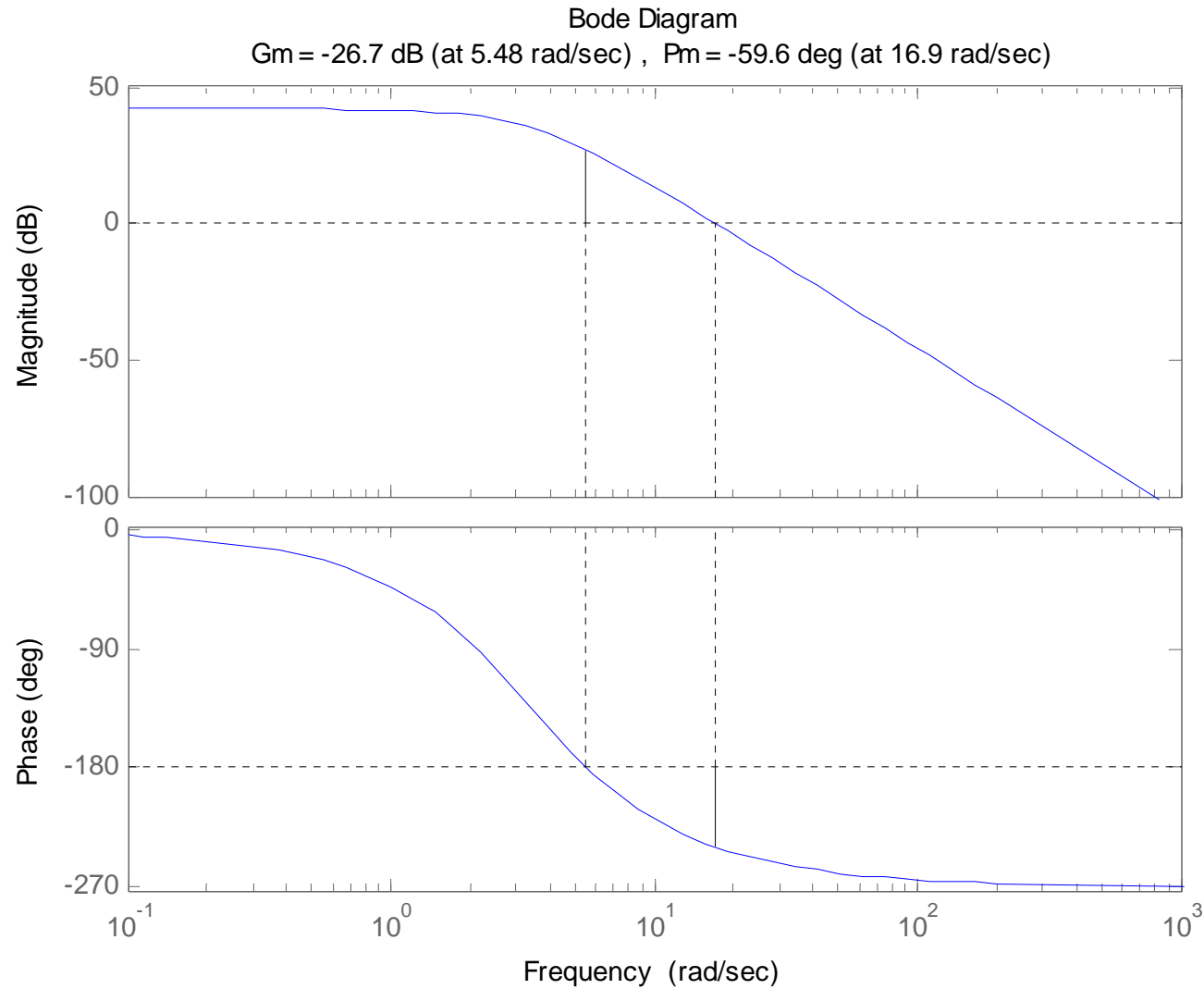
- Suponga que se añade una ganancia de 100, introduciendo la función bode(100*50,[1 9 30 40]).
- Se obtendrá la siguiente gráfica (tenga en cuenta que se han cambiado los ejes para que la escala sea la misma que el gráfico anterior, el diagrama de Bode que usted obtenga puede no tener exactamente la misma forma, dependiendo de la escala que se esté usando):

3. Ejemplo

- Como puede ver la gráfica de la fase es idéntica a la anterior, y la gráfica de la magnitud está desplazada hacia arriba 40 dB (una ganancia de 100).



3. Ejemplo



3. Ejemplo

- Como puede ver la gráfica de la fase es idéntica a la anterior, y la gráfica de la magnitud está desplazada hacia arriba 40 dB (una ganancia de 100).
- El margen de fase es ahora de aproximadamente -60° . Este es el mismo resultado que se hubiese obtenido si se hubiera desplazado 40dB hacia abajo el eje y. Inténtelo, examine el primer diagrama de Bode, encuentre la frecuencia a la que la magnitud corta a -40 dB, y calcule el margen de fase.
- Debería de ser aproximadamente -60° , la misma cantidad obtenida del segundo diagrama de Bode.

4. Frecuencia de Ancho de Banda

- La *frecuencia de ancho de banda* se define como la frecuencia a la que la magnitud de la respuesta de bucle cerrado es igual a -3 dB.
- Cuando se diseña utilizando la respuesta en frecuencia, se está interesado en predecir el funcionamiento de bucle cerrado a partir de la respuesta de bucle abierto.

4. Frecuencia de Ancho de Banda

- Se usará una aproximación a un sistema de segundo orden y se dice que el ancho de banda es la frecuencia a la que la magnitud de la respuesta de bucle abierto está entre -6 y -7,5 dB, considerando que la fase de la respuesta en frecuencia de bucle abierto esté comprendida entre -135° y -225° .
- Para una demostración exhaustiva de esta afirmación consulte un libro de texto.

4. Frecuencia de Ancho de Banda

- Para ilustrar la importancia del ancho de banda, se mostrará como la salida varía dependiendo de la frecuencia de la señal de entrada.
- Se verá como el sistema es capaz de seguir "*razonablemente bien*" las entradas sinusoidales con frecuencias menores que (*ancho de banda*).
- Y como las entradas sinusoidales con frecuencias mayores que son atenuadas (en magnitud) en un factor de 0,707 o mayor (y por supuesto desplazadas en la fase).

5. Ejemplo

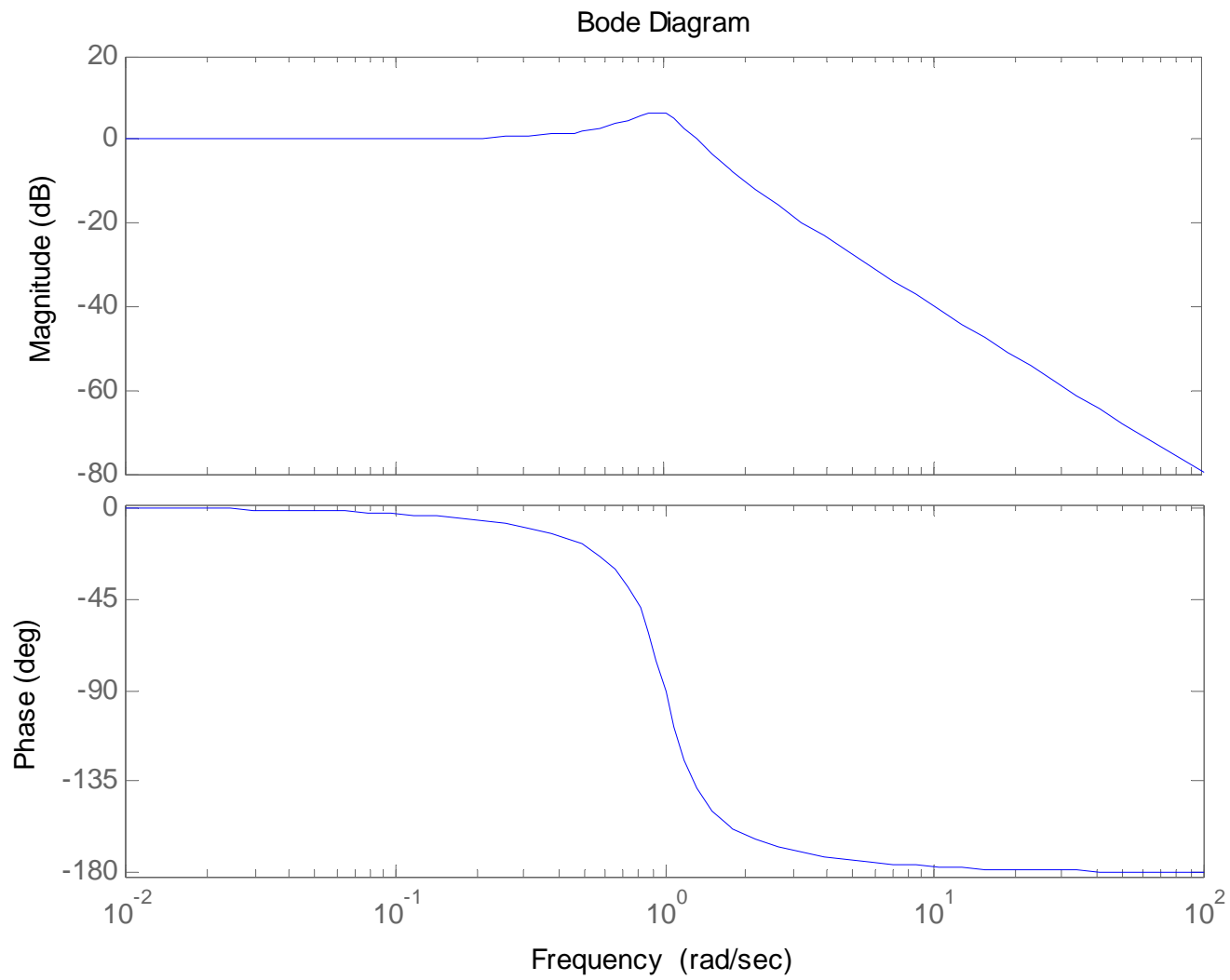
- Supóngase que la siguiente función de transferencia de bucle cerrado representa un sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

- En primer lugar, se halla el ancho de banda a partir de diagrama de Bode:

bode (1, [1 0.5 1])

5. Ejemplo



5. Ejemplo

- Como esta es la representación de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en bucle cerrado, el ancho de banda será la frecuencia correspondiente a un ganancia de -3dB.
- De la gráfica que es aproximadamente 1,4 rad/s.
- También se observa en la gráfica que para una frecuencia de 0,3 rad/s, la salida sinusoidal tiene una magnitud de uno y un retraso de fase de unos pocos grados respecto de la entrada.

5. Ejemplo

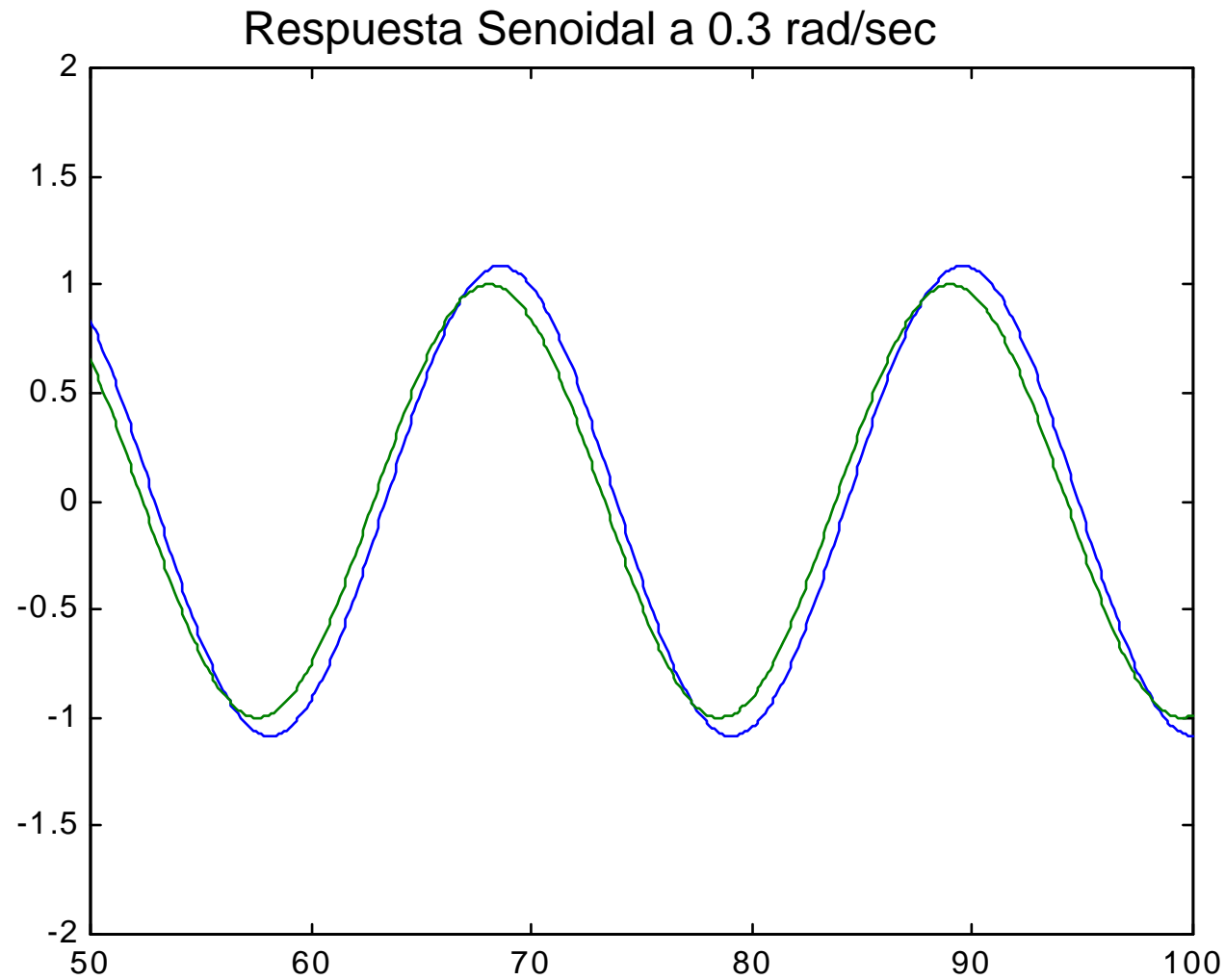
- Para una frecuencia de entrada de 3 rad/s, la magnitud de la salida es aproximadamente -20 dB (o lo que es lo mismo 1/10 el valor de la entrada) y un desfase de -180° (casi exactamente en el límite de la fase).
- Usaremos la función `lsim` para simular la respuesta del sistema ante entradas sinusoidales.

5. Ejemplo

- Considere una entrada sinusoidal con una *frecuencia menor que ω_{bc}* .
- Se debe tener en mente que lo que se pretende es ver el *error en régimen estacionario e_{ss}* .
- Se modificarán los ejes para ver con claridad la respuesta en régimen estacionario (ignorando la respuesta transitoria).

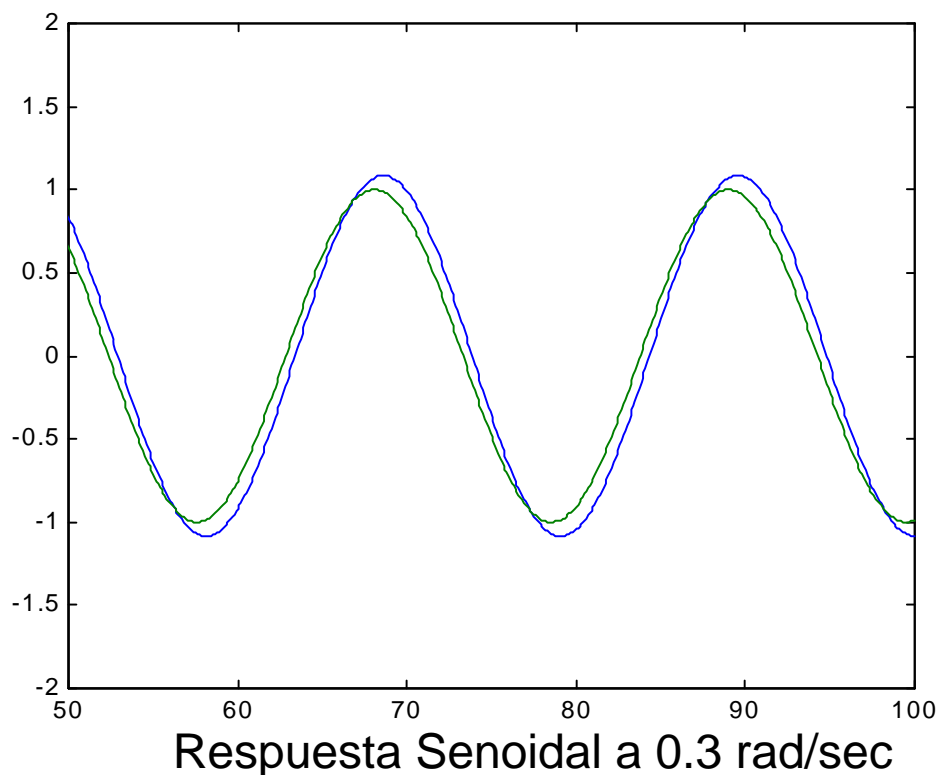
```
>> margin(MM1)
>> bode (1, [1 0.5 1 ])
>> w= 0.3;
num = 1;
den = [1 0.5 1 ];
t=0:0.1:100;
u = sin(w*t);
[y,x] = lsim(num,den,u,t);
plot (t,y,t,u)
axis ([50,100,-2,2])
```

5. Ejemplo



5. Ejemplo

- Observe como la salida (azul) sigue bastante bien la entrada (verde); quizás, como se esperaba, con unos pocos grados de retraso.

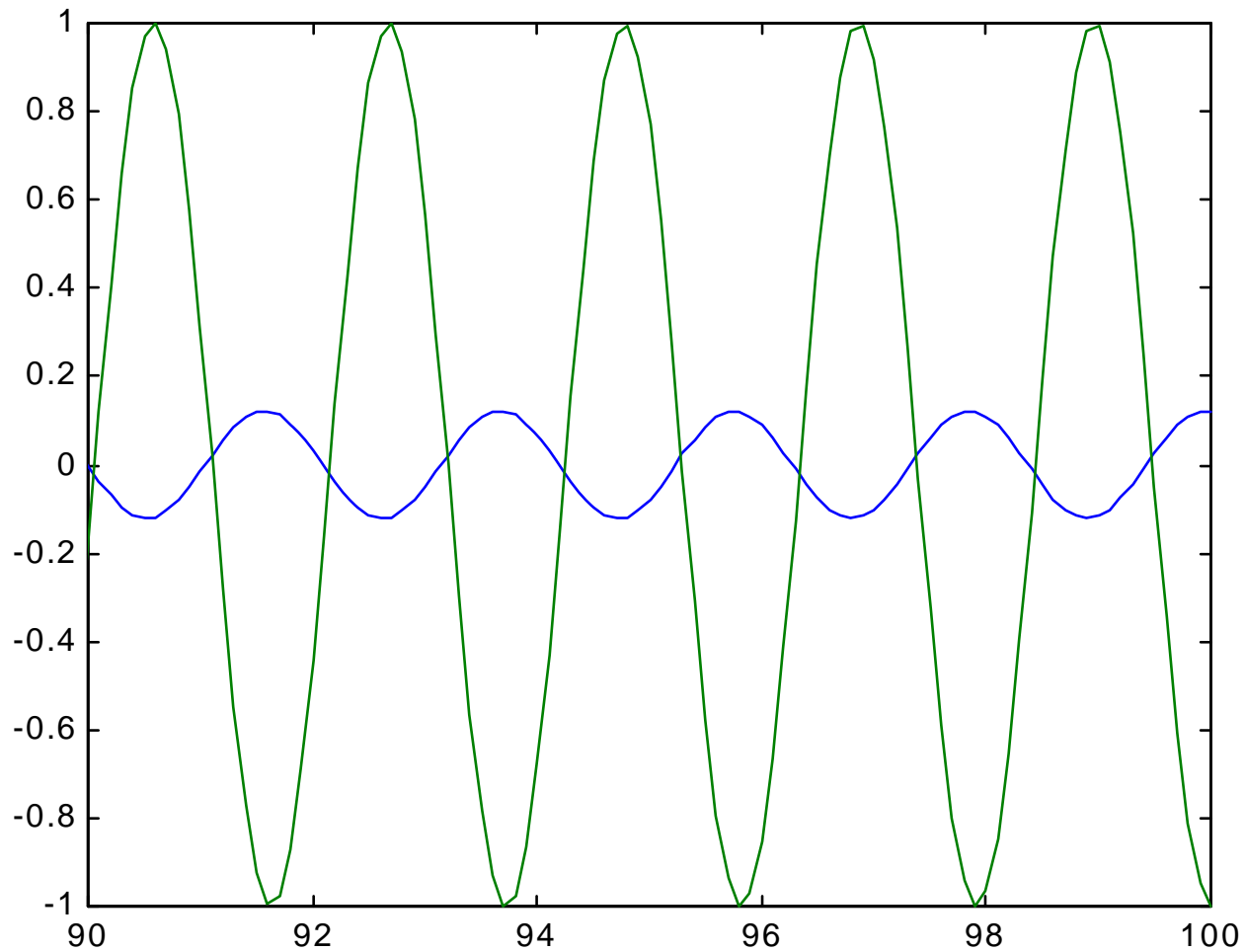


5. Ejemplo

- Sin embargo, si se establece la frecuencia de entrada a un valor *mayor que la frecuencia del ancho de banda* del sistema, se obtiene una salida muy distorsionada (con respecto a la entrada)

```
w = 3;  
num = 1;  
den = [1 0.5 1];  
t=0:0.1:100;  
u = sin(w*t);  
[y,x] = lsim(num,den,u,t);  
plot(t,y,t,u)  
axis([90, 100, -1, 1])
```

5. Ejemplo



Respuesta Senoidal a 3 rad/sec

5. Ejemplo

- Observe, de nuevo, como la magnitud es $1/10$ el valor de la entrada, como se predijo, y que está casi exactamente fuera de fase (retrasada 180 grados) de la entrada.
- Experimente representando respuestas para diferentes frecuencias , y compruebe como se corresponden con el diagrama de Bode.