# Operación de Líneas de Transmisión

## Problema #1

Una línea de transmisión que opera a 115 kV tiene los siguientes parámetros:
$Z = 0.1920 + 0.5024\ j\ \Omega/\text{km}$
$Y = 3.26\times10^{-6}$ Siemens/km

Determinar:
(a) Las constantes generalizadas de la línea de transmisión para las siguientes longitudes $l = 30$, 100 y 300 km.
(b) Los circuitos equivalentes y nominales π para $l = 30$, 100 y 300 km.
(c) Circuito simplificado para líneas cortas.

*Resolución*

Se conoce que a partir de los datos de la línea de transmisión se puede determinar la impedancia característica de la línea.

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0.1920 + 0.5024\,j}{3.26\times10^{-6}\,j}} = 406.92\angle -10.457^{\circ}\ \Omega$$

De igual modo se determina la constante de propagación.

$$\gamma = \sqrt{yz} = \sqrt{(0.1920 + 0.5024\,j)\times 3.26\times10^{-6}} = (0.2407 + 1.3039)\times10^{-3}\,km^{-1}$$

Se procede al calculo de las constantes generalizadas, para $l = 30$ km.

Para el cálculo de las funciones hiperbólicas es mejor proceder al calculo separado de los exponenciales:

$$\gamma l = l\sqrt{yz} = 30\sqrt{(0.1920 + 0.5024\,j)\times 3.26\times10^{-6}} = (07.221 + 39.117)\times10^{-3}\,km^{-1} = \alpha l + j\beta l$$

La parte imaginaria de $\gamma l$ esta dada en radianes, pero resulta convenientes expresarla en unidades de grados.

$$\beta l = 39.117\times10^{-3}\,rad = 2.241^{\circ}$$

$$\alpha l = 7.221\times10^{-3}\,neper$$

$$e^{\alpha l} = 1.0072 \quad e^{-\alpha l} = 0.9928$$

$$e^{\gamma l} = 1.0072\angle 2.241 = 1.0064 + 0.0394\,j$$

$$e^{-\gamma l} = 0.9928\angle -2.241 = 0.992 - 0.0388\,j$$

Se procede a determinar los parámetros de transmisión de la línea ($A$, $B$, $C$ y $D$).

$$A = D = \cosh(\gamma l) = 0.992 + 0.0003\,j = 0.9992\angle 0.0172^{\circ}$$

$$senh(\gamma l) = 0.0072 + 0.0391\,j = 0.0398\angle 79.56^{\circ}$$

$$B = Z_0 senh(\gamma l) = 16.178\angle 69.1^\circ$$

$$C = \frac{senh(\gamma l)}{Z_0} = 9.78\times 10^{-5}\angle 90^\circ$$

Utilizando el mismo procedimiento de calculo se procede a determinar las constantes generalizadas de las líneas para las otras longitudes: $l$ = 100 y 300 km, en la siguiente tabla se recoge un resumen de los resultados.

| | 30 km | 100 km | 300 km |
|---|---|---|---|
| $A$=$D$ | $0.9992\angle 0.0172^\circ$ | $0.9918\angle 0.1810^\circ$ | $0.9273\angle 1.704^\circ$ |
| $B$ | $16.178\angle 69.1^\circ$ | $52.78\angle 69.14^\circ$ | $157.91\angle 69.61^\circ$ |
| $C$ | $9.78\times 10^{-5}\angle 90^\circ$ | $9.78\times 10^{-5}\angle 90^\circ$ | $9.78\times 10^{-5}\angle 90^\circ$ |

El circuito equivalente y nominal π viene dado por:

| Circuito Equivalente | Circuito Nominal |
|---|---|
| $z_\pi = Z_0 senh(\gamma l)$ | $z_\pi = Zl$ |
| $y_\pi = \dfrac{\cosh(\gamma l)-1}{Z_0 senh(\gamma l)}$ | $y_\pi = Y\dfrac{l}{2}$ |

Se procede a efectuar las respectivas evaluaciones y resulta:

| | Circuito Equivalente | | Circuito Nominal | |
|---|---|---|---|---|
| $l$ [Km.] | $z_\pi$ [Ω] | $y_\pi$ [Siemens] | $z_\pi$ [Ω] | $y_\pi$ [Siemens] |
| 30 | $16.18\angle 69.1^\circ$ | $0.53\times 10^{-4}\angle 69.1^\circ$ | $16.13\angle 69.08^\circ$ | $j0.49\times 10^{-4}$ |
| 100 | $52.90\angle 78.48^\circ$ | $1.63\times 10^{-4}\angle 89.95^\circ$ | $53.78\angle 69.08^\circ$ | $j0.49\times 10^{-4}$ |
| 300 | $157.91\angle 69.61^\circ$ | $4.95\times 10^{-4}\angle 89.70^\circ$ | $161.34\angle 69.08^\circ$ | $j0.49\times 10^{-4}$ |

Para el circuito simplificado de líneas cortas basta con tomar el valor de Zπ, correspondiente al circuito nominal en π, calculado.

| | 30 km | 100 km | 300 km |
|---|---|---|---|
| $Zl$ [Ω] | $16.134\angle 69.08^\circ$ | $53.78\angle 69.08^\circ$ | $161.34\angle 69.08^\circ$ |

Nota: Para un voltaje de 115 kV una longitud de 300 km resulta ser impractica. Para longitudes tan extensas se emplean voltajes nominales mayores. Se ha incluido esta longitud solo con propósitos académicos; y para comparación de los mismos.

## Problema #2

Considerando la línea de transmisión de 115 kV, ya empleada en el Problema #1, para las longitudes de $l$ = 30 y 100 km. Determine la corriente del extremo de envío ($I_s$), cuando la línea esta en vacío ($I_r$ =0), utilizando la *solución exacta* y la *solución por el circuito nominal en* $\pi$ y el circuito simplificado para *líneas cortas*.

*Resolución*

Se procede a efectuar la *solución exacta* de las variables eléctricas, para ello se emplea las constantes generalizadas y las constantes de transmisión.

$$I_r = -BV_s + AI_s$$

Si se considera que la línea se encuentra en vacío, ($I_r$ =0), se tiene que:

$$I_s = -\frac{C}{A}V_s$$

Se conoce que el voltaje en el extremo de envío medido a referencia es:

$$V_s = \frac{115kV}{\sqrt{3}}\angle 0V$$

El voltaje se debe dividir entre raíz de tres, ya que el dato suministrado, es el voltaje nominal de línea a línea, y se recuerda que los modelos de la línea son dados de línea a neutro, por lo que el voltaje debe ser llevado a voltaje de fase.

Sustituyendo se tiene la corriente en el extremo de envió es:

$$I_s = -\frac{C}{A}V_s$$

Las constantes $A$ y $C$ dependen de la longitud de la línea; de tal modo que:

$l$ = 30 km;

$$I_s = 6.5\angle 89.98A$$

$l$ = 100 km;

$$I_s = 21.76\angle 89.82A$$

En el caso que se tiene el *circuito nominal en* $\pi$.

En el caso que se tiene la línea de transmisión operando en vacío, la corriente en el extremo de envío es igual al voltaje de envío por la admitancia equivalente vista desde el extremo de envío.

$$Y_{eq} = y_\pi + \frac{1}{z_\pi + \frac{1}{y_\pi}}$$

Sustituyendo los respectivos valores de $z_\pi$ y $y_\pi$. Para $l$ = 30 km,

$$Y_{eq} = 0.98036\times 10^{-4} siemens$$

Y se tiene $l$ = 30 km:

$$I_s = 6.509\angle 90A$$

$l$ = 100 km;

$$Y_{eq} = 0.98036\times 10^{-4}\angle 89.91 siemens$$

$$I_s = 21.73\angle 89.91A$$

Con el circuito simplificado de la línea de transmisión para líneas cortas como la corriente de envío es igual a la de recepción ($I_r = I_s$), cuando la línea esta en vacío ($I_r$ =0), entonces la corriente de envío es cero ($I_s$ =0).

En la siguiente tabla se resume los resultados que se logran para la corriente del extremo de envío para todos los casos planteados.

| *l* (km) | *Solución exacta* | *Circuito nominal* $\pi$ | *Circuito para líneas cortas* |
|---|---|---|---|
| 30 | 6.5∠89.98 | 6.509∠90 | 0 |
| 100 | 21.76∠89.82 | 21.73∠89.91 | 0 |

La solución mediante el circuito simplificado para las líneas cortas, aun cuando es trivial, se agrego de manera intencional para ilustrar el error que se comete cuando se efectúa una aproximación sin considerar le pertinencia o no de la misma; lo cual puede degenerar el resultados erróneos. Para una longitud de 30 km, la aproximación del modelo de línea corta es valida para otros cálculos pero para determinar la corriente que entra a la línea cuando opera en vacío no es adecuada. El resultado obtenido con los otros dos procedimientos, el exacto y el nominal, demuestra cuan distante se determina la corriente de envío ($I_s$) de ser igual a cero.

## Problema #3

De un nodo de un sistema de potencia se alimenta una carga radial de 100 MW y factor de potencia 80% en atraso, mediante una línea de transmisión con los siguientes parámetros:

$l$ = 300 km
$V_n$ = 400 kV
$f$ = 60 Hz
$Z$ = 0.0331+0.3896j Ω/km
$Y = 4.357\times10^{-6}$ siemens/km

Determine:
(a) El voltaje en el extremo de envío para que en el extremo receptor el voltaje resultante sea de 300 kV.
(b) La potencia que entra por el extremo de envío.
(c) La potencia activa que consume la línea de transmisión.
(d) La potencia reactiva que pueda consumir o generar la línea de transmisión.
(e) Si por algún medio el ángulo de transmisión se incrementa a 6° manteniendo los módulos de los voltajes de los extremos constantes, cual es la nueva potencia consumida por la carga.

*Resolución*

Se procede a emplear el circuito nominal Π de la línea de transmisión, donde se tiene que los parámetros del modelo son fácilmente calculados como:

$$Z_\pi = 117.30\angle 85.14^\circ\,\Omega$$

$$Y_\pi = j0.6536\times10^{-3}\,siemens$$

Se emplea el modelo por fase, donde se asume el voltaje del extremo de recepción a referencia, por lo que se cumple que:

$$V_r = \frac{400kV}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 230.94\angle 0^\circ\,kV$$

La potencia aparente que consume la carga puede ser obtenida por medio de la siguiente expresión:

$$S_r = \frac{100MVA}{0.8}\angle\cos^{-1}(0.80) \qquad S_r = 125\angle 36.87^\circ\,MVA \text{ (trifásica)}$$

Debido a que se esta empleando un modelo por fase se tiene que:

$$S_r = \frac{125}{3}\angle 36.87^\circ\,MVA \qquad S_r = 41.67\angle 36.87^\circ\,MVA \text{ por fase}$$

La corriente que consume la carga, y la cual viene a través de la línea de transmisión radial, es:

$$I_r = \left(\frac{S_r}{V_r}\right)^* \qquad I_r = \left(\frac{41.67\angle 36.87MVA}{230.94\angle 0kV}\right)^* \qquad I_r = 180.44\angle -36.86A$$

De tal modo, que se emplean las ecuaciones de voltaje-corriente conocidas y que se aplican al modelo Π.

$$V_s = V_r + I_r Z_\pi$$

$$I_s = I_r + V_r Y_\pi$$

Sustituyendo los valores se tiene que la *corriente en el extremo de envío* es:

$$I_s = 154.186\angle 14.68^\circ\,A$$

La potencia reactiva del elemento $Y_\pi$, en el extremo receptor es suficiente para suplir el consumo reactivo de la carga, por esta razón, $I_s$, es una corriente de naturaleza capacitiva en contraste con $I_r$ que es inductiva.

$$V_r = 227.86 + j17.8 = 228.55\angle 4.47^\circ\,kV$$

Es de notar que el modulo del voltaje en el extremo emisor es menor que el extremo receptor. Esto se explica por el aporte reactivo de la línea.

La *corriente en el extremo emisor* se puede calcular como:

$$I_s = I_r + V_r Y_\pi$$

$$I_s = 154.186\angle 14.68^\circ + 149.38\angle 94.47^\circ = 232.91\angle 53.8^\circ\,A$$

La *potencia aparente en el extremo de envío*, total y trifásica será:

$S_s = 3V_s I_s^* = 159.94\angle -49.51 = 103.69 - 121.45\, jMVA$

Debido a que se ha asumido que la potencia en el receptor es saliente, se puede estimar la *potencia activa que consume la línea* como la diferencia de potencias en sus extremos, de modo que se cumple:

$P_L = 103.69 - 100 = 3.69 MW$

De manera similar para la potencia reactiva se obtiene:

$Q_L = -121.45 - 75 = -196.45 MVAr$

Para un ángulo de potencia δ = 6°, se tiene que la *corriente en el extremo de envío* puede ser calculado como:

$I_s = 206.02\angle 13.53 = 200.3 + 48.19\, jA$

Por su parte, la *corriente en el extremo de recepción* será:

$I_r = I_s - V_r Y_\pi$

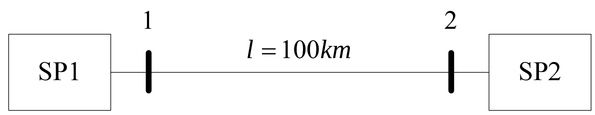
$I_r = 206.02\angle 13.53^\circ - j150.94 = 225.12\angle -27.16^\circ A$

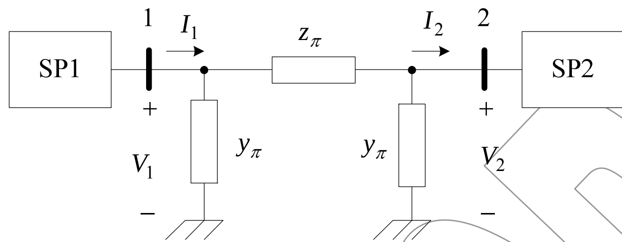
La *potencia aparente que consume la carga* en el receptor es:

$S_r = 156.0\angle -24.16 MVA$

## Problema #4

Una línea de transmisión de 60 Hz, 400 kV, trifásica, interconecta dos sistemas de potencia como se muestra en la siguiente Figura.




La línea de transmisión tiene los siguientes parámetros:

$z$ = 0.0331+0.3896j Ω/km

$y$ = 4.36×10$^{-6}$ siemens/km

Se sabe que los voltajes línea a neutro en 1 y 2 son:

$$V_1 = \frac{406}{\sqrt{3}}\angle -10^\circ kV \qquad V_2 = \frac{395}{\sqrt{3}}\angle -3^\circ kV$$

Determinar:

(a) Si el SP1 recibe o entrega potencia activa y su valor.
(b) Si el SP2 recibe o entrega potencia activa y su valor.
(c) Si el SP1 recibe o entrega potencia reactiva y su valor.
(d) Si el SP2 recibe o entrega potencia reactiva y su valor.

*Resolución*

Se emplea el circuito en π.

$$z_\pi = 39.1\angle 85.14\Omega$$

$$y_\pi = 0.21\times 10^{-3} siemens$$

En este caso no se sabe quien es el receptor o emisor por lo tanto es mejor asumir que las dos corrientes $I_1$, $I_2$ entran a la línea.

$$I_1 = V_1 y_\pi + \frac{(V_1 - V_2)}{z_\pi}$$

$$I_2 = V_2 y_\pi + \frac{(V_2 - V_1)}{z_\pi}$$

Sustituyendo los respectivos valores se obtiene:

$$I_1 = 723.29\angle 187.24^\circ A$$

$$I_2 = 753.62\angle 14.68^\circ A$$

La potencia aparente que entra por cada nodo se tiene:

$$S_1 = 508.63\angle -197.24^\circ = -485.77 + 150.74j$$

$$S_2 = 515.6\angle -17.68^\circ = 491.24 - 156.586j$$

(a) Asumiendo que las corriente entraban a los nodos se ha obtenido el resultado negativo para la potencia activa del nodo 1:

$$P_1 = -485.77MW$$

Lo que indica que en realidad la potencia activa sale. Es decir que el SP1 recibe potencia.

(b) En concordancia con lo anterior el valor positivo de $P_2$, entrando al nodo 2:

$P_2$ = 491.24 MW

Indica que el SP2 suple potencia activa al SP1 por intermedio de la línea de transmisión.

(c) El valor de $Q_1$ positivo entrando al nodo 1:

$Q_1$ = 150.74 MVAr

Implica que el SP1 entrega potencia reactiva a SP1

(d) El valor de $Q_2$ negativa entrando el nodo 2:

$Q_2$ = -156.586 MVAr

Implica que el SP2 recibe potencia reactiva. Los 5.846 MVAr adicionales a $Q_1$ los suple la línea de transmisión.

Una forma de comprobar los resultados anteriores es calcular la potencia activa y reactiva de la línea. Las sumas $P_1 + P_2$ y $Q_1 + Q_2$, deben concordar con los valores de calculados para la línea de transmisión.