

Introducción a la Operación en Régimen Estacionario de la Línea de Transmisión

4.1 Introducción

El diseño de la línea de transmisión es sumamente apasionante, pero otro aspecto importante e igualmente atractivo lo es la operación de la línea de transmisión; de modo que los parámetros eléctricos se mantengan en explotación dentro de los límites de calidad del sistema.

4.2 Circuitos Equivalentes para Líneas de Transmisión

Para los estudios de la transmisión de energía eléctrica, se debe definir el objetivo de estos sistemas; desplazar los bloques energéticos desde los puntos de generación, hasta las cargas

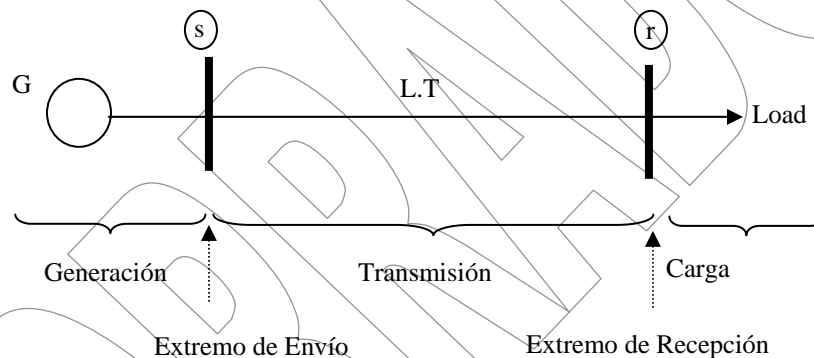


Figura 1. Esquema de un Sistema de Transmisión

El problema de transmisión de energía puede ser resumido a estudiar el comportamiento del voltaje y la potencia en los extremos de envío; ante condiciones impuestas de voltaje y potencia en el extremo de recepción o carga. Existen dos supuestos que se deben dejar claro como lo son el hecho de que las líneas son perfectamente transpuestas y el sistema de voltajes y corrientes son balanceadas. Estos supuestos se consideran válidos aunque la línea no se transpuesta, debido a que los porcentajes de asimetría por este hecho son mínimos.

Entre los supuestos anteriores; se debe incluir el hecho de que se supone que las cargas terminales son trifásicas simétricas equilibradas.

Para poder realizar el análisis en operación del sistema de transmisión, se debe obtener un modelo adecuado de la línea de transmisión; que según varios autores, estos modelos son clasificados en función de la longitud de la línea, quedando agrupados en tres grandes grupos:

- Líneas Cortas.
- Líneas Medias.
- Líneas Largas.

Esta clasificación obedece a la longitud y a una serie de aproximaciones admitidas el operar con los parámetros de la línea. Es de conocimiento general, que la línea de transmisión es caracterizada por cuatro parámetros eléctricos: resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia de fuga; los cuales se encuentran uniformemente repartidos a lo largo del trayecto de la línea, y que cuando la longitud se hace apreciable (líneas largas) y en cálculos exactos, se debe estudiar estrictamente este supuesto.

En aquellas líneas donde la longitud no es apreciable (líneas medias), se puede asumir que la capacitancia, se encuentra agrupada o concentrada en forma total en cada extremo de la línea, sin que se cometa un error numérico apreciable en los cálculos. Por último si las líneas son cortas; el efecto de la susceptancia capacitiva; puede ser despreciable. En el caso de frecuencia de operación a 60 Hz; las longitudes distintivas para cada tipo de línea queda dado por:

- Líneas Cortas: longitud menos a 50 millas (80Km).
- Líneas Medias: longitud entre las 80 millas y las 150 millas (240 Km).
- Líneas Largas: cuya longitud es superior a 150 millas.

Es importante acotar que las líneas en ocasiones son extendidas hasta las 200 millas.

Se puede afirmar que por ahora; sin dar mayor explicación, que el parámetro para realizar la clasificación; es la longitud de la línea (L), comparado con la *longitud de onda* (λ). Es importante, sin embargo, que se diferencie a las líneas cortas que denotan tensiones de 115 o 230 kV como máximo, de las denominadas líneas largas, representativas de los sistemas de extra alta y ultra alta tensión (400, 800 y más kV).

4.3 Líneas Cortas

En la gran mayoría de los casos; es seguro aplicar el análisis de la línea cortas cuya longitud ronda las 30 millas y los voltajes menores a 40 kV. Sin embargo, en Venezuela las líneas cortas denotan tensiones de 115 o 230 kV como máximo; siendo evidente el hecho de que estas líneas son frecuentes en los sistemas de baja tensión y tensiones intermedias; que se caracterizan porque su longitud no es significativa.

A estos niveles de tensión, y de longitud pequeña comparada con la longitud de onda ($\lambda \approx 6000$ Km, a 60 Hz), la importancia de la capacitancia distribuida y la corriente de carga (I_{chg}) puede ser minúscula desde el punto de vista eléctrico; por lo que con esto el estudio de la línea, se simplifica notablemente. Permitiéndose ignorar a las capacitancias derivación del circuito equivalente respectivo.

En base a las suposiciones anteriores, el modelo equivalente de la línea corta puede ser resumido a una componente activa R_{LT} y una componente de reactiva, X_{LT} , de naturaleza inductiva (Figura 2).

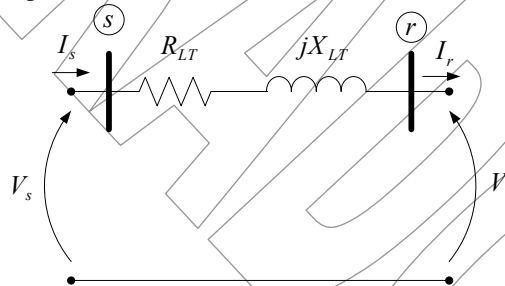


Figura 2. Modelo de Línea de Transmisión Corta

donde V_s e I_s son la corriente y la tensión en los extremos de envío y V_r e I_r los respectivos para el extremo de recepción. Si se aplican las leyes de Kirchoff al modelo equivalente; se obtiene el juego de ecuaciones que describen el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned} I_s &= I_r \\ V_s &= (R_{LT} + jX_{LT})I_s + V_r \end{aligned} \quad (1)$$

Observece que el la caída de tensión en la línea puede ser escrito como: $\Delta V = (R_{LT} + jX_{LT})I_s$, donde fácilmente se evidencia que una disminución en la demanda del consumidor (load) disminuye también I_r , y por consiguiente también la caída de tensión ΔV en la línea. Entonces la tensión en el extremo de recepción, V_r , aumenta hasta alcanzar un valor cercano o igual al extremo de envío V_s , lo cual se cumple literalmente en la marcha en vacío.

En la práctica el incremento de tensión al disminuir bruscamente la carga no deberá exceder del 5% de la tensión nominal de operación, de manera que el consumidor no sufra mayores daños. De modo que a nivel de proyecto la caída de tensión en la línea tiene que ser dimensionada entre límites razonables. Desde el punto de vista operacional, interesan más los valores absolutos de las tensiones en los extremos de la línea que el defasaje imperante entre ellos.

4.4 Regulación de Voltaje

La regulación de voltaje en una línea de transmisión es la variación de voltaje en el extremo receptor cuando se pasa de vacío a plena carga (o viceversa); para un voltaje en el extremo emisor constante y un factor de potencia dado en la carga. Esta variación se expresa generalmente en porcentaje a plena carga en el extremo receptor. Como las cargas en los sistemas de potencia son generalmente inductiva; se presupone; que una reducción de tensión se produce con un factor de potencia inductivo y una elevación de tensión en el caso del factor de potencia capacitivo.

La regulación es función de la carga y su factor de potencia; el concepto de regulación antes expuesto; se utiliza en sistemas radiales donde el extremo de la fuente (claramente definido) está conectado a un generador y el otro extremo a la carga. En general, los sistemas de potencia son mallados; de modo que el concepto de regulación en esta condición es difícil de aplicar de modo referencial, en su lugar se emplea el estado de los voltajes en cada barra del sistema de potencia para diferentes condiciones de carga.

El valor de regulación en ocasiones se emplea como parámetro de diseño de la línea de transmisión; para un voltaje de operación dado. Un valor típico de regulación para diseño es alrededor de 10%. La expresión matemática que define la regulación, resulta:

$$\% \text{ Regulación} = \frac{|V_{r,0}| - |V_r|}{|V_r|} \times 100\% \tag{2}$$

donde: $|V_{r,0}|$ es el voltaje en el extremo de recepción en vacío, $|V_r|$ es el voltaje de recepción de en la carga.

4.5 Solución Analítica para Regulación de Voltaje de Líneas Cortas conocidas las Condiciones de Recepción

El más común de los problemas de regulación es uno en el cual es deseado obtener la caída de voltaje para una condición terminal de recepción conocida. Si se considera el modelo de la línea de transmisión corta, para la solución de este problema es más conveniente hacer V_r , el fasor de referencia ($V_r = |V_r| \angle 0^\circ$).

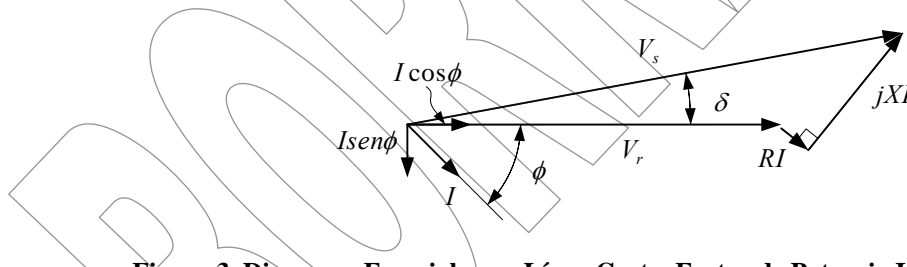


Figura 3. Diagrama Fasorial para Línea Corta, Factor de Potencia Inductivo (*Lagging*)

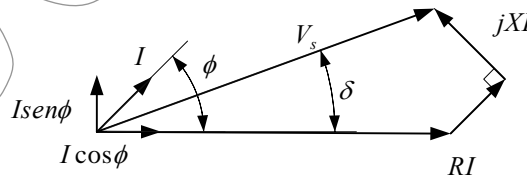


Figura 4. Diagrama Fasorial para Línea Corta, Factor de Potencia Capacitivo (*Leading*)

Solo para ser empleado con objetivo de evaluación, o académicos. Prohibido la reproducción total o parcial de este documento sin autorización del autor. Derechos de autor reservados. Copyright © 2007

Es importante mencionar que si los voltajes son de línea a línea son aplicados, las caídas de tensión deben ser multiplicadas por $\sqrt{3}$, en líneas trifásicas y por dos en líneas monofásicas. En lo sucesivo, el signo del ángulo del factor de potencia ϕ , depende si la corriente adelanta o atrasa a la tensión. Para factor de potencia inductivo ϕ y $\text{sen } \phi$ son negativos; y para factor de potencia en adelanto ϕ y $\text{sen } \phi$ son positivos; el $\text{cos } \phi$ es siempre positivo tanto en adelanto como en atraso. Si se considera una línea de transmisión corta; se conoce que en operación; se cumple:

$$\begin{aligned} I_s &= I_r \\ V_s &= (R_{LT} + jX_{LT})I_s + V_r \end{aligned} \quad (1)$$

Si la línea de transmisión corta se encuentra en vacío; se tiene que la tensión de recepción y la de envío son iguales.

$$\begin{aligned} V_s &= (R_{LT} + jX_{LT})I_s + V_r \rightarrow V_s = V_r \\ |V_{r0}| &= |V_s| \end{aligned} \quad (3)$$

Y en la carga; la tensión en el extremo de recepción es V_r ; de modo que el factor de regulación es máximo con los factores de potencia en retraso. Y mínimo o incluso negativo, con los factores de potencia en adelanto. Ahora bien palpar el efecto de regulación en líneas medias y largas es más fácil de ver. Si se considera el caso de factor de potencia inductivo:

$$\begin{aligned} I_s &= |I_r| \cos \phi + j|I_r| \text{sen } \phi \\ V_s &= V_r + Z_{LT}I_s \end{aligned} \quad (4)$$

donde: $Z_{LT} = R_{LT} + jX_{LT}$, sustituyendo se tiene.

$$V_s = (|V_r| + |I_r|R_{LT} \cos \phi - |I_r|X_{LT} \text{sen } \phi) + j(|I_r|R_{LT} \text{sen } \phi - |I_r|X_{LT} \cos \phi) \quad (5)$$

el diagrama fasorial, considerando factor de potencia inductivo, resulta:

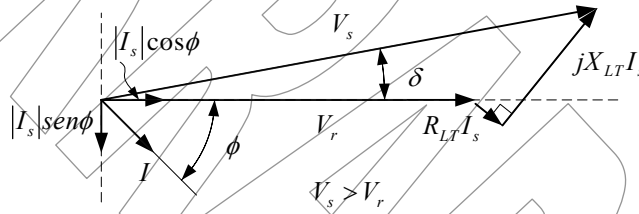


Figura 5. Diagrama Fasorial de Línea Corta con Carga de Factor de Potencia Inductivo

$$|V_s| = \sqrt{(|V_r| + |I_r|R_{LT} \cos \phi - |I_r|X_{LT} \text{sen } \phi)^2 + (|I_r|R_{LT} \text{sen } \phi - |I_r|X_{LT} \cos \phi)^2} \quad (6)$$

Si $|I_r|X_{LT}$ e $|I_r|R_{LT}$ son caídas no mayores al 10%, de V_s y V_r , entonces se tiene:

$$|V_s| = |V_r| + |I_r|R_{LT} \cos \phi - |I_r|X_{LT} \text{sen } \phi \quad (7)$$

Tomando la definición adoptada de regulación se tiene:

$$\% \text{ Regulación} = \frac{|V_{r0}| - |V_r|}{|V_r|} \times 100\% \quad (2)$$

$$\% \text{ Regulación} = \frac{100\% |I_r|}{|V_r|} (R_{LT} \cos \phi - X_{LT} \text{sen } \phi) \quad (8)$$

Si se tiene:

$$kVA = \frac{\sqrt{3} |V_{LLr}| |I_r|}{1000} \quad (9)$$

$$\% \text{ Regulación} = \frac{100.000(kVA)}{|V_{LLr}|^2} (R_{LT} \cos \phi - X_{LT} \text{sen } \phi) \quad (10)$$

Esta ecuación muestra que un valor de carga que puede ser transmitida sobre la línea dada una regulación fija, varía inversamente con la longitud. Usando la regulación calculada por esta ecuación, se determina el voltaje en el extremo de recepción, con una precisión de 0.5%, si ni la caída resistiva ni inductiva supera el 10% del voltaje terminal.

4.6 Regulación de Voltaje de Líneas Cortas para Condiciones Conocidas en el Extremo de Envío

Para calcular el voltaje en los extremos de recepción conocido el de envío, es más conveniente el uso de V_s como referencia como se muestra en las figuras siguientes:

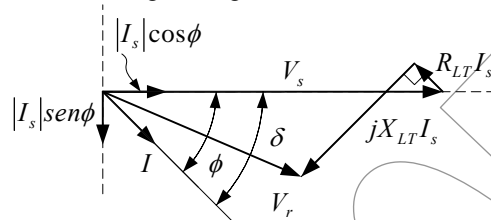


Figura 6. Diagrama Fasorial de Línea Corta, Factor de Potencia Inductivo (*Lagging*)

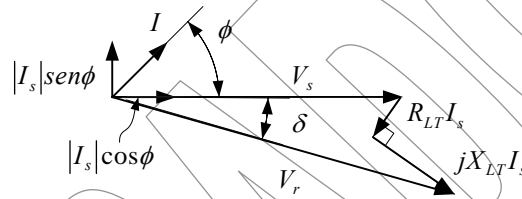


Figura 7. Diagrama Fasorial de Línea Corta, Factor de Potencia Capacitivo (*Leading*)

$$\begin{aligned} V_s &= |V_s| \angle 0^\circ \\ V_r &= V_s - Z_{LT} I \end{aligned} \tag{11}$$

donde: $Z_{LT} = R_{LT} + jX_{LT}$. Se puede deducir fácilmente del diagrama fasorial que:

$$V_r = (|V_s| - |I|R_{LT} \cos \phi + |I|X_{LT} \text{sen} \phi) - j(|I|X_{LT} \cos \phi + |I|R_{LT} \text{sen} \phi) \tag{12}$$

$$|V_r| = \sqrt{(|V_s| - |I|R_{LT} \cos \phi + |I|X_{LT} \text{sen} \phi)^2 + (|I|X_{LT} \cos \phi + |I|R_{LT} \text{sen} \phi)^2} \tag{13}$$

Si se procede a obviar las componentes en cuadratura de V_r , se tiene:

$$|V_r| \approx |V_s| - |I|R_{LT} \cos \phi + |I|X_{LT} \text{sen} \phi \tag{14}$$

de modo que con esta expresión se puede determinar la regulación de la línea.

4.7 Problemas Conteniendo Condiciones Terminales Mixtas

Algunas veces son encontrados problemas donde son dadas condiciones terminales mixtas, tales como factor de potencia de la carga y el voltaje en el extremo de envío, o factor de potencia de envío y voltaje en el extremo de recepción; y es necesario determinar el voltaje desconocido para corrientes dadas.

Tales problemas no pueden ser resueltos por medios analíticos triviales. Por ejemplo si es requerido determinar el voltaje de recepción para un factor de potencia, conocido el voltaje de envío y corriente, es necesario resolver para la siguiente ecuación:

$$|V_s| = \sqrt{(|V_r| + |I_r|R_{LT} \cos \phi - |I_r|X_{LT} \text{sen} \phi)^2 + (|I_r|R_{LT} \text{sen} \phi - |I_r|X_{LT} \cos \phi)^2} \tag{6}$$

Se desea determinar V_r , de modo que elevando al cuadrado en ambos miembros de la ecuación, se obtiene una ecuación cuadrática en términos de V_r . En ocasiones un método más conveniente de resolver esto es el método de ensayo y error; asumiendo valores sucesivos de dos cantidades; siendo esto frecuentemente conveniente. También algunas veces se hace más fácil resolver el problema por medios gráficos.

El más importante problema de este tipo puede ser resuelto por el uso de la carta de regulación y pérdidas.

4.8 Pérdidas Resistivas en Líneas Cortas

Las pérdidas por efecto Joule ($|I|^2 R_{LT}$) de una línea trifásica, es tres veces el producto de la resistencia de un conductor y el cuadrado de la magnitud de su corriente.

$$Loss = 3R_{LT}|I|^2 \quad (15)$$

donde $Loss$ es la pérdida resistiva en la línea en Watt; este valor puede quedar referido a una fracción porcentual de la carga, de la siguiente forma:

$$\% Loss = \frac{100\sqrt{3}R_{LT}|I|^2}{|V_{L-Lr}|\cos\phi_r} \quad (16)$$

donde; V_{L-Lr} , es la tensión línea a línea en el extremo de recepción de la línea corta y ϕ_r , es el ángulo del factor de potencia en el extremo de recepción de la línea.

En ocasiones se desea determinar el valor de potencia que puede ser transmitido sin exceder un cierto porcentaje de pérdidas ($\%Loss$); siendo esto dado por la expresión:

$$P = \frac{\%Loss|V_{L-Lr}|^2\cos^2\phi_r}{100.000R_{LT}} \quad (16)$$

Esta ecuación muestra que el valor de potencia que puede ser transmitida para un porcentaje de pérdidas dado, varía directamente con las pérdidas e inversamente con la longitud debido a que la resistencia total de la línea, R_{LT} , es la resistencia por unidad de longitud por la longitud de la línea.

4.9 Líneas Medias

En longitudes medias, entre 80 Km. y 240 Km., la admitancia derivación es generalmente capacitiva pura (aunque en niveles elevados de tensión de debe incluir la conductancia de fuga en esta); y esta debe ser incluida en la simulación de la línea. Esta capacitancia puede ser dividida en dos parte iguales, colocadas en los extremos del modelo, constituyendo el modelo nominal Π .

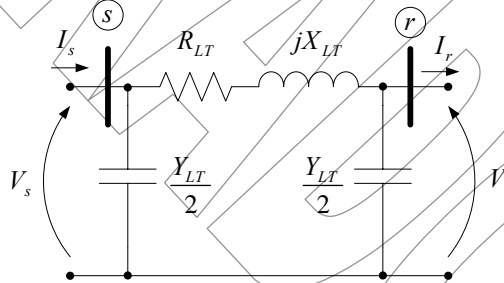


Figura 8. Modelo Equivalente de Líneas Medias

Si se considera que la impedancia serie de la línea de transmisión es: $Z_{LT} = R_{LT} + jX_{LT}$, y se procede a plantear las ecuaciones de las leyes de Kirchoff de tensiones y de corrientes; en el modelo se obtiene:

$$I_s = \frac{Y_{LT}}{2}V_s + \frac{V_s - V_r}{Z_{LT}} \quad (17)$$

$$\frac{V_s - V_r}{Z_{LT}} = I_s + \frac{Y_{LT}}{2}V_r \quad (18)$$

operando sobre las ecuaciones (17) y (18) se tiene:

$$Z_{LT}I_s = \frac{Z_{LT}Y_{LT}}{2}V_s + V_s - V_r$$

$$V_s - V_r = Z_{LT}I_s + \frac{Z_{LT}Y_{LT}}{2}V_r$$

se tiene:

$$V_r = \left(\frac{Z_{LT} Y_{LT}}{2} \right) V_s - Z_{LT} I_s \quad (19)$$

$$V_s = \left(\frac{Z_{LT} Y_{LT}}{2} \right) V_r - Z_{LT} I_r \quad (20)$$

reordenando los términos resulta:

$$V_r = \left(\frac{Z_{LT} Y_{LT}}{2} \right) V_s - Z_{LT} I_s \quad (21)$$

$$I_s = Y_{LT} \left(1 + \frac{Z_{LT} Y_{LT}}{4} \right) V_r - Z_{LT} I_r \quad (22)$$

es decir que de acuerdo con los parámetros de transmisión de tiene:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde se cumple:

$$A = D = \frac{Z_{LT} Y_{LT}}{2} + 1$$

$$B = Z_{LT}$$

$$C = Y_{LT} \left(1 + \frac{Z_{LT} Y_{LT}}{4} \right)$$

y además se cumple la propiedad de los parámetros de transmisión:

$$AD - BC = 1 \quad (24)$$

Uno de los elementos más comunes y extensos en los sistemas eléctricos de potencia, es la línea de transmisión, su diseño eléctrico es un estudio apasionante, en el cual se persigue adaptar sus características a los requerimientos de transmisión del sistema de potencia. Durante el diseño eléctrico de la línea de transmisión, se suelen tomar en cuenta cuatro parámetros eléctricos básicos: resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia. El estudio de cada una de estas características eléctricas de la línea es un proceso delicado, y en donde los aspectos particulares de la línea influyen en los valores.

4.10 Ecuaciones Generales de Voltaje y Corriente en Líneas de Transmisión Largas

Una línea de transmisión consta de dos o más conductores paralelos que se usan para conectar a una fuente o un circuito con otro. Para poder simular en forma exacta el comportamiento de una línea de transmisión, considérese una línea de transmisión uniforme, con parámetros distribuidos $R \Omega/m$, L Henrio/m, G Siemens/m y C en Faradio/m.

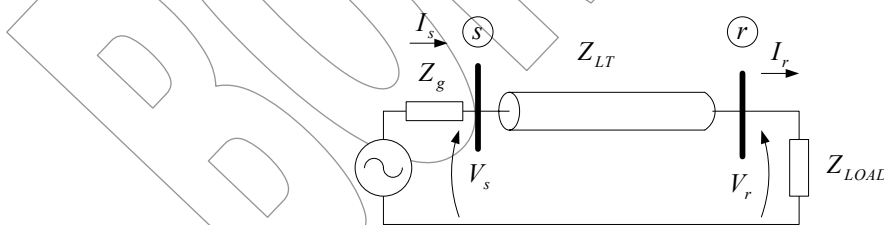


Figura 9. Esquema de una Línea de Transmisión con Carga

El circuito equivalente de la línea puede ser hecho a través de un número apreciable de secciones que incluyan los parámetros R , L , G y C ; que son parámetros por unidad de longitud y que en consecuencia se encuentran distribuidos a lo largo de la línea.

Para el análisis de esta situación considérese que la línea posee una longitud L total; y que se asigna un sentido de referencia longitudinal x a lo largo de la línea tomándose, que el extremo de envío de la línea corresponde a $x = 0$, y que el extremo de recepción se encuentra en $x = L$.

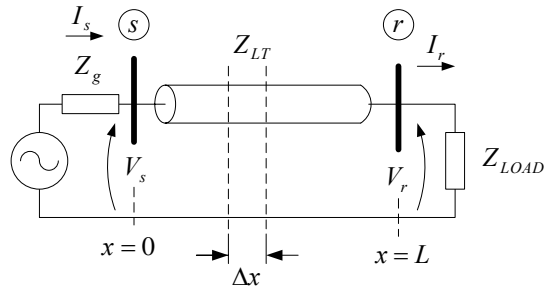


Figura 10. Sección de Línea de ancho Δx

En este elemento de sección de la línea, la resistencia contenida viene dada por $R\Delta x$, de igual manera ocurre con la inductancia $L\Delta x$, capacitancia $C\Delta x$, y la conductancia de fuga, $G\Delta x$

Nótese algo muy importante para la modelación de esta situación; si se considera que el tamaño de la sección se duplica, $2\Delta x$, los valores de los parámetros de la sección resultan respectivamente $2R\Delta x$, $2L\Delta x$, $2C\Delta x$, $2G\Delta x$. De lo antes expuesto se evidencia que al duplicar la longitud, se duplican la resistencia y la inductancia asociada, lo que significa que estos elementos deben encontrarse en forma serie; mientras que la conductancia de fuga y la capacitancia se doblan, lo cual solo se logra cuando estos parámetros se encuentran en paralelo, lo cual indica que en el modelo de la situación R y L debe encontrarse en serie y C y G en Shunt.

Si primeramente se consideran solamente los efectos resistivos e inductivos en la línea, se tiene que el modelo puede quedar simplificado a:

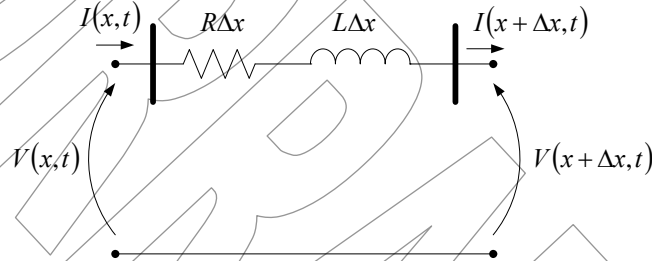


Figura 11. Efecto de la Impedancia Serie

Del modelo antes mostrado se cumple que la corriente en ambos extremos es igual:

$$I(x,t) = I(x+\Delta x,t) \quad (25)$$

Si se aplican la ley de tensiones de Kirchoff se tiene:

$$V(x,t) = R\Delta x I(x,t) + L\Delta x \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + V(x+\Delta x,t) \quad (26)$$

si se transponen términos y se opera se tiene:

$$\frac{V(x,t) - V(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = RI(x,t) + L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

Ahora bien, si se hace que la longitud de la sección de haga infinitamente pequeño, $\Delta x \rightarrow 0$, entonces se cumple:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x,t) - V(x+\Delta x,t)}{\Delta x} \right] = - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

resultando finalmente que:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = RI(x,t) + L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \quad (27)$$

La expresión (27), permite relacionar la variación longitudinal de la tensión en el espacio tiempo, con respecto a la variación de la corriente. Por otra parte si se procede a considerar únicamente el efecto de los parámetros conductancia de fuga y la capacitancia en derivación.

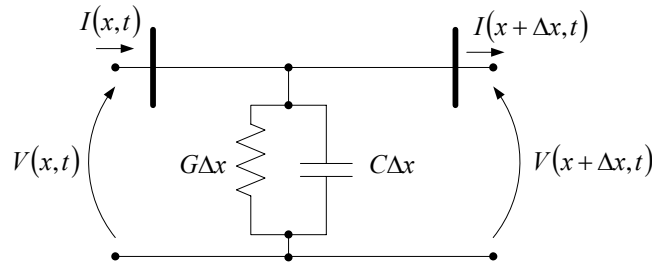


Figura 112. Efecto de los elementos derivación

Del modelo antes mostrado se cumple que la tensión en ambos extremos es igual:

$$V(x,t) = V(x + \Delta x, t) \tag{28}$$

Si se aplican la ley de corriente de Kirchoff se tiene:

$$I(x,t) = G\Delta x V(x,t) + C\Delta x \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + I(x + \Delta x, t) \tag{29}$$

si se transponen términos y se opera se tiene:

$$\frac{I(x,t) - I(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = GV(x,t) + C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

Ahora bien, si se hace que la longitud de la sección de haga infinitamente pequeño, $\Delta x \rightarrow 0$, entonces se cumple:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{I(x,t) - I(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \right] = - \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

resultando finalmente que:

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = GV(x,t) + C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \tag{30}$$

La expresión (30), permite relacionar la variación longitudinal de la corriente en el espacio tiempo, con respecto a la variación de la tensión. Ahora bien, cuando se considera el efecto de los elementos serie y derivación; se construye un modelo, para la sección de longitud Δx .

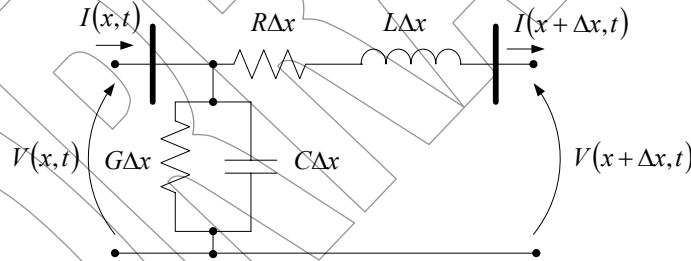


Figura 113. Efecto de los elementos derivación y serie

Al aplicando las leyes de Kirchoff, se tiene:

$$V(x,t) = R\Delta x I(x + \Delta x, t) + L\Delta x \frac{\partial I(x + \Delta x, t)}{\partial t} + V(x + \Delta x, t) \tag{31}$$

$$I(x,t) = G\Delta x V(x,t) + C\Delta x \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + I(x + \Delta x, t) \tag{32}$$

si se opera sobre cada expresión:

$$\frac{V(x,t) - V(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = RI(x + \Delta x, t) + L \frac{\partial I(x + \Delta x, t)}{\partial t} \tag{33}$$

$$\frac{I(x,t) - I(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = GV(x,t) + C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \tag{34}$$

Si se hace que la sección del conductor se hace tender a cero, $\Delta x \rightarrow 0$, se cumple:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{I(x,t) - I(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \right] = -\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x,t) - V(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \right] = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

finalmente se tiene:

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = RI(x,t) + L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \quad (36)$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = GV(x,t) + C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \quad (37)$$

Ahora bien, si se supone que el sistema de transmisión se excita por medio de señales armónicas en el tiempo; como es el caso más común de las líneas de transmisión, se puede transformar las ecuaciones en el dominio de la frecuencia ω , suponiendo que se trabaja con una señal armónica de velocidad angular constante.

$$-\frac{\partial V(x,\omega)}{\partial x} = (R + j\omega L)I(x,\omega) \quad (38)$$

$$-\frac{\partial I(x,\omega)}{\partial x} = (G + j\omega C)V(x,\omega) \quad (39)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, son las ecuaciones que caracterizan el comportamiento de la línea. Estas ecuaciones pueden ser compactadas de una forma muy sencilla; si se toma la ecuación (36) en el dominio temporal y se deriva respecto al espacio se tiene:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = R \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial \left(\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \right)}{\partial t}$$

Si se sustituye en esta expresión la derivada de la corriente en función del espacio dada en la ecuación (37) se tiene:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - (RC + GL) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - RGV(x,t) \quad (40)$$

la expresión anterior se conoce como la *ecuación del telegrafista*. En el caso particular que se estudie la línea sin pérdida, ($R = G = 0$) como es el caso aproximado de las líneas de extra alta tensión, la ecuación del telegrafista resulta idéntica a la ecuación diferencial de una membrana oscilante (ecuación de onda unidimensional)

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \quad (41)$$

Esta ecuación diferencial se presenta, por lo tanto, en la mecánica al analizar las membranas oscilantes, en la acústica al analizar cierto tipo de oscilaciones y también en la electromagnética, que es el caso de la presente discusión. De modo similar se puede considerar que si la excitación es de tipo armónica, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 V(x,\omega)}{\partial x^2} = ZYV(x,\omega) \quad (42)$$

donde se cumple:

$$Z = R + j\omega L$$

$$Y = G + j\omega C \quad (43)$$

Emprender la solución, de la ecuación (41) o (42), en forma estricta resulta sumamente compleja; de modo que se va a estudiar la solución de la mencionada ecuación en el dominio de señales armónicas en el tiempo (42). La ecuación (42) que considera la excitación ante señales armónicas en el tiempo, puede ser estudiada como una ecuación diferencial homogénea, cuya solución ya conocida.

$$\frac{\partial^2 V(x,\omega)}{\partial x^2} - ZYV(x,\omega) = 0 \quad (42)$$

La solución de este tipo de ecuación es de la forma:

$$V(x, \omega) = e^{\lambda x} \tag{a}$$

Ahora bien las derivadas de las soluciones son:

$$\frac{\partial V(x, \omega)}{\partial x} = \lambda e^{\lambda x} \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{c}$$

Si se sustituyen (a) y (c) en la ecuación (42) se tiene:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - ZY e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - ZY e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 = ZY$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{ZY}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{ZY}$$

Ahora bien, se consigue que la solución de la tensión es:

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} \tag{43}$$

sustituyendo se tiene:

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{\sqrt{ZY}x} \tag{44}$$

Para el caso de la solución de corriente, se tiene que de la ecuación (38), se tiene:

$$I(x, \omega) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial V(x, \omega)}{\partial x} \tag{38}$$

$$I(x, \omega) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial (A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{\sqrt{ZY}x})}{\partial x}$$

$$I(x, \omega) = -\frac{1}{Z} (-\sqrt{ZY} A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + \sqrt{ZY} A_2 e^{\sqrt{ZY}x})$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z} (\sqrt{ZY} A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} - \sqrt{ZY} A_2 e^{\sqrt{ZY}x}) \tag{45}$$

Si se define el parámetro: γ , como *constante de propagación* y Z_0 , la *impedancia característica de la línea*.

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \tag{46}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \tag{47}$$

Al sustituir en las soluciones de corriente y tensión resulta:

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \tag{48}$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \tag{49}$$

Notece que los parámetros A_1 y A_2 , son las constantes de integración; que proveen la familia de curvas que son solución de la ecuación diferencial (42), para eliminar de la expresión esas constantes, se debe evaluar las condiciones terminales físicas de la línea.

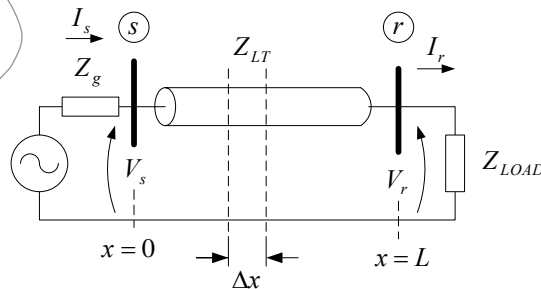


Figura 114. Condiciones Terminales de la Línea

Se conoce que en $x = 0$, se ubica el extremo de envío, de modo que los parámetros de tensión y corriente quedan definidos para ese punto.

$$\begin{aligned} V(x=0, \omega) &= V_s \\ I(x=0, \omega) &= I_s \end{aligned} \quad (50)$$

mientras que en la posición $x = L$, se trata de las condiciones de tensión y corriente del extremo de recepción.

$$\begin{aligned} V(x=L, \omega) &= V_r \\ I(x=L, \omega) &= I_r \end{aligned} \quad (51)$$

Si primeramente se sustituyen las condiciones del terminal de envío de la línea de transmisión; en las soluciones de tensión y corriente se tiene:

$$\begin{aligned} V(x=0, \omega) &= V_s = A_1 + A_2 \\ I(x=0, \omega) &= I_s = \frac{1}{Z_o} (A_1 - A_2) \end{aligned}$$

de donde se establece un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas A_1 , y A_2 que al resolverse se tiene:

$$A_1 = \frac{(V_s + Z_o I_s)}{2} \quad (52)$$

$$A_2 = \frac{(V_s - Z_o I_s)}{2} \quad (53)$$

Finalmente sustituyendo las constantes de integración en las soluciones de tensión y corriente se tiene:

$$V(x, \omega) = \frac{(V_s + Z_o I_s)}{2} e^{-\gamma x} + \frac{(V_s - Z_o I_s)}{2} e^{\gamma x} \quad (54)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} \left(\frac{(V_s + Z_o I_s)}{2} e^{-\gamma x} - \frac{(V_s - Z_o I_s)}{2} e^{\gamma x} \right) \quad (55)$$

Estas ecuaciones permite calcular los parámetros tensión y corriente en la línea de transmisión, en función de los parámetros del extremo de envío. Por otra parte, frecuentemente resulta necesario determinar la tensión y la corriente en la línea conocidos los parámetros del extremo de recepción, para ello se puede emplear las condiciones terminales del extremo de recepción y se sustituyen en las soluciones de tensión y corriente.

Se conoce que en $x = L$, se cumple:

$$V(x=L, \omega) = V_r = A_1 e^{-\gamma L} + A_2 e^{\gamma L}$$

$$I(x=L, \omega) = I_r = \frac{1}{Z_o} (A_1 e^{-\gamma L} - A_2 e^{\gamma L})$$

de modo que se crea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas A_1 y A_2 :

$$A_1 = \frac{(V_r + Z_o I_r)}{2} e^{\gamma L} \quad (56)$$

$$A_2 = \frac{(V_r - Z_o I_r)}{2} e^{-\gamma L} \quad (57)$$

Sustituyendo en la solución de corriente y tensión resulta:

$$V(x, \omega) = \frac{(V_r + Z_o I_r)}{2} e^{-\gamma(L-x)} + \frac{(V_r - Z_o I_r)}{2} e^{\gamma(L-x)} \quad (58)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} \left(\frac{(V_r + Z_o I_r)}{2} e^{-\gamma(L-x)} - \frac{(V_r - Z_o I_r)}{2} e^{\gamma(L-x)} \right) \quad (59)$$

Estas expresiones son las que permite conocidos los parámetros del extremo receptor determinar la tensión y la corriente en la línea.

4.11 Ecuaciones de Línea Larga en Forma Hiperbólica

Considere las soluciones de tensión y corriente de las ecuaciones características de la línea de transmisión, considerando operación ante ondas armónicas de frecuencia constantes; ya además se supone que los parámetros de envío son conocidos.

$$V(x, \omega) = \frac{(V_s + Z_o I_s) e^{-\gamma x} + (V_s - Z_o I_s) e^{\gamma x}}{2} \quad (54)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} \left(\frac{(V_s + Z_o I_s) e^{-\gamma x} - (V_s - Z_o I_s) e^{\gamma x}}{2} \right) \quad (55)$$

A estas ecuaciones se le realiza un simple desarrollo matemático se tiene:

$$V(x, \omega) = V_s \frac{(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x})}{2} + Z_o I_s \frac{(e^{-\gamma x} - e^{\gamma x})}{2} \quad (56)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} \left(V_s \frac{(e^{-\gamma x} - e^{\gamma x})}{2} - Z_o I_s \frac{(e^{-\gamma x} - e^{\gamma x})}{2} e^{\gamma x} \right) \quad (57)$$

Ahora bien, si se considera la propiedad matemática que relaciona los exponenciales en función de expresiones hiperbólicas; resulta sumamente útil, para calcular la corriente y la tensión en la línea.

$$\sinh(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \quad (58)$$

$$\cosh(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \quad (59)$$

Sustituyendo (58) y (59) en (56) y (57) se tiene:

$$V(x, \omega) = V_s \cosh(\gamma x) - Z_o I_s \sinh(\gamma x) \quad (60)$$

$$I(x, \omega) = -\frac{V_s}{Z_o} \sinh(\gamma x) + I_s \cosh(\gamma x) \quad (61)$$

Un desarrollo semejante puede ser realizado para las ecuaciones de tensión y corriente de la línea, pero en función de los parámetros de recepción (V_r e I_r).

$$V(x, \omega) = V_r \cosh(\gamma(L-x)) - Z_o I_r \sinh(\gamma(L-x)) \quad (62)$$

$$I(x, \omega) = -\frac{V_r}{Z_o} \sinh(\gamma(L-x)) + I_r \cosh(\gamma(L-x)) \quad (63)$$

Ahora bien el conjunto de ecuaciones de tensión y corriente pueden ser expresadas en forma más compacta con el uso de la notación matricial.

$$\begin{bmatrix} V(x, \omega) \\ I(x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma x) & -Z_o \sinh(\gamma x) \\ -\frac{\sinh(\gamma x)}{Z_o} & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (64)$$

En el caso de que las condiciones del extremo de recepción sean conocidos el juego de ecuaciones de tensión y corriente resultan:

$$\begin{bmatrix} V(x, \omega) \\ I(x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma(L-x)) & -Z_o \sinh(\gamma(L-x)) \\ -\frac{\sinh(\gamma(L-x))}{Z_o} & \cosh(\gamma(L-x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (65)$$

En condiciones normales de operación es muy común el interés sobre las cantidades en los extremos de la línea; de modo que si se sustituyen en las ecuaciones (64), las condiciones del extremo de recepción $x = L$.

$$\begin{aligned} V(x=L, \omega) &= V_r \\ I(x=L, \omega) &= I_r \end{aligned} \quad (51)$$

se tiene que:

$$\begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & -Z_o \sinh(\gamma L) \\ -\frac{\sinh(\gamma L)}{Z_o} & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (66)$$

Por otro lado si se realiza la misma suposición en el extremo de envío, $x = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} V(x=0, \omega) &= V_s \\ I(x=0, \omega) &= I_s \end{aligned} \quad (50)$$

sustituyendo en la ecuación (65), se logra:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & -Z_0 \sinh(\gamma L) \\ \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (67)$$

Estos valores matriciales expresados en forma compacta con funciones hiperbólicas; permiten establecer las *constantes generalizadas* de la línea.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (68)$$

donde se cumple:

$$\begin{aligned} A &= D = \cosh(\gamma L) \\ B &= Z_0 \sinh(\gamma L) \\ C &= \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma L) \end{aligned} \quad (69)$$

Es importante mencionar que la matriz de funciones hiperbólicas presentes en la ecuación (66), es exactamente la inversa de la ecuación (67). En el caso de las líneas de transmisión trifásicas equilibradas, la corriente es una corriente de línea, mientras que la tensión existente es la de línea a neutro, siendo esto válido en todas las ecuaciones antes establecidas. Para resolver estas ecuaciones en forma hiperbólicas, es preciso previamente determinar los valores de las funciones hiperbólicas. Ya que normalmente el valor γL es complejo, y en consecuencia las funciones hiperbólicas también lo son; pero el advenimiento de poderosas calculadoras y computadoras digitales han permitido el cálculo más rápido de estos valores; en el pasado se hacía necesario el uso de una serie de gráficos, algunos adaptados a los valores típicos de los problemas de líneas de transmisión; para poder evaluar las funciones complejas.

4.12 Ecuaciones de las Líneas de Transmisión Larga en el Dominio del Tiempo, con señales armónicas

Para comprender un poco mejor la teoría de onda viajera; recuérdese el hecho de que las soluciones de tensión y corriente provienen de resolver la ecuación (42), que corresponde a la ecuación diferencial parcial de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} - ZYV(x, \omega) = 0 \quad (42)$$

La solución general de esta ecuación; corresponde a la combinación lineal de dos exponenciales.

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \quad (48)$$

La solución (48) de la ecuación diferencial denota primariamente una dependencia del espacio x , pero una vez que se determina las constantes de integración A_1 , y A_2 , se hace evidente la presencia de cantidades definidas en los puntos terminales como fasores. De modo que las constantes de integración son quienes contienen la dependencia de la frecuencia de la solución; siendo todo esto cierto, se reconoce que A_1 y A_2 , son cantidades complejas que pueden ser escritas en forma polar.

$$\begin{aligned} A_1 &= |A_1| e^{j\alpha t} \\ A_2 &= |A_2| e^{j\alpha t} \end{aligned} \quad (70)$$

Ahora bien, si se sustituye el hecho de que la impedancia características Z_0 y la constante de propagación γ , son cantidades complejas.

$$\begin{aligned} Z_0 &= |Z_0| e^{j\psi} \\ \gamma &= \alpha + j\beta \end{aligned} \quad (71)$$

Si estas definiciones en forma exponencial se sustituyen en la solución general de la ecuación (48).

$$\begin{aligned} V(x, t) &= |A_1| e^{j\alpha t} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + |A_2| e^{j\alpha t} e^{\alpha x} e^{j\beta x} \\ V(x, t) &= |A_1| e^{j\psi} e^{-\alpha x} e^{j(\alpha t - \beta x)} + |A_2| e^{\alpha x} e^{j(\alpha t + \beta x)} \end{aligned} \quad (73)$$

y para la corriente resulta de modo semejante:

$$I(x,t) = \frac{|A_1|}{|Z_0|} e^{-j\psi} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} - \frac{|A_2|}{|Z_0|} e^{-j\psi} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}$$

$$I(x,t) = \frac{|A_1|}{|Z_0|} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x - \psi)} - \frac{|A_2|}{|Z_0|} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x - \psi)} \quad (74)$$

Si se toma la forma de los valores momentáneos de las expresiones anteriores resulta:

$$V(x,t) = |A_1| e^{-\alpha x} \text{sen}(\omega t - \beta x) + |A_2| e^{\alpha x} \text{sen}(\omega t + \beta x) \quad (75)$$

$$I(x,t) = \frac{|A_1|}{|Z_0|} e^{-\alpha x} \text{sen}(\omega t - \beta x - \psi) - \frac{|A_2|}{|Z_0|} e^{\alpha x} \text{sen}(\omega t + \beta x - \psi) \quad (76)$$

Nótese que si se considera los argumentos de las funciones seno de las expresiones (75) y (76), se evidencia que la tensión en la línea, $V(x,t)$, denota dos componentes u ondas viajeras cuya dirección puede ser fácilmente establecida. Si se toma la ecuación de la onda viajera de tensión (75) y se considera que esta línea no tiene pérdidas primeramente para simplificar el análisis ($\alpha = 0$), se puede afirmar que esta constituida por la combinación lineal de dos funciones f_1 y f_2 :

$$V(x,t) = f_1(\omega t - \beta x) + f_2(\omega t + \beta x) \quad (76)$$

Si se determina la tensión para un tiempo t_1 , esta tensión debe quedar determinada para una ubicación espacial x_1 .

$$V(x = x_1, t = t_1) = f_1(\omega t_1 - \beta x_1) + f_2(\omega t_1 + \beta x_1) \quad (77)$$

y para un tiempo t_2 , tal que $t_2 > t_1$, se tiene:

$$V(x = x_2, t = t_2) = f_1(\omega t_2 - \beta x_2) + f_2(\omega t_2 + \beta x_2) \quad (78)$$

Ahora bien, debido a que la línea se supuso sin pérdidas, y esta libre de distorsión, la forma de onda debe mantenerse. Ambas funciones tienen que ser iguales entre sí, lo cual se cumple solo para argumentos idénticos. De modo que tomando la función f_1 , se tiene:

$$\omega t_1 - \beta x_1 = \omega t_2 - \beta x_2$$

reagrupando los términos se tiene:

$$\omega(t_2 - t_1) = \beta(x_2 - x_1)$$

Se supuso originalmente $t_2 > t_1$, de modo que $t_2 - t_1$ es positivo; de modo que para que el segundo término de la igualdad sea positivo, $x_2 - x_1 > 0$, se debe cumplir que $x_2 > x_1$, lo cual se logra solo si la onda en el tiempo se desplaza hacia el extremo de envío, este tipo de onda recibe el nombre de *onda progresiva* u *onda incidente*. De forma análoga para la *onda regresiva* o *reflejada* se cumple:

$$\omega t_1 + \beta x_1 = \omega t_2 + \beta x_2$$

$$\omega(t_2 - t_1) = \beta(x_1 - x_2)$$

para que sea positivo, $x_1 - x_2 > 0$, se debe cumplir que $x_1 > x_2$, lo cual se logra solo si la onda en el tiempo se desplaza hacia el extremo de recepción. Se puede generalizar para cualquier línea de transmisión entonces que la solución de tensión y corriente están constituidas por dos ondas, una incidente y una reflejada (subíndice P ; progresiva, R ; reflejada):

$$V(x,t) = V_P + V_R \quad (79)$$

$$I(x,t) = I_P + I_R \quad (80)$$

donde V_P y V_R , son las onda de tensión incidente y reflejada respectivamente e I_P e I_R , las misma notación para las ondas de corriente. Se puede demostrar fácilmente que estas relaciones de ondas cumplen con un símil de la ley de Ohm para ondas.

$$I(x,t) = \frac{V_P - V_R}{Z_0} \quad (81)$$

resultando:

$$I_P = \frac{V_P}{Z_0} \quad (82)$$

$$I_R = -\frac{V_R}{Z_0} \quad (83)$$

Las expresiones V_P e I_P , son ondas que se desplazan desde el comienzo de la línea hasta el extremo de recepción. Lo mismo sucede pero en dirección opuesta con las expresiones V_R e I_R .

Este método que proviene de considerar el *método de D'Alembert*, y permite el fácil seguimiento de los fenómenos de ondas viajeras en los sistemas de transmisión. En la línea real, cada punto en el espacio de la línea denotará una fase diferente durante la oscilación, eso se observa por el factor βx , incluido en el argumento de las funciones, mientras que la amplitud de las ondas viajeras en la líneas no es constantes sino que depende de la constante de atenuación α , el cual influye sobre los exponentes reales αx . Las ondas incidentes o progresivas que se desplazan hacia el extremo de recepción de la línea denotan una disminución de la amplitud cada vez mayor, ya que x , se hace cada vez más grande. Con las ondas reflejadas sucede lo contrario.

Para efectos gráficos cabe señalar que la punta de los fasores de tensión de la onda incidente o progresiva cae sobre una espiral logarítmica. Esta se suele representar tomando como ordenada submúltiplos de la *longitud de onda* ($\lambda/6$, $\lambda/8$, etc.)

La magnitud de las ondas incidente y reflejada, en particular la diferencia de las mismas, al circular en oposición (sentidos contrarios), depende básicamente de la resistencia al final de la línea, es decir, impedancia de la carga. Si por ejemplo, la línea se encuentra conectada idealmente, es decir, se coloca como carga la impedancia característica se tiene, que la tensión en el extremo de recepción (V_r) es el producto de la impedancia características por la corriente de recepción (I_r).

$$V_r = Z_0 I_r$$

de modo que, de las condiciones terminales para la obtener los valores de las constantes de integración, se tiene:

$$A_2 = 0$$

En este caso particular, se tendrán solo ondas incidentes que se desplazan del extremo de envío al de recepción. Si por el contrario, la impedancia de la carga difiere cada vez más de la impedancia característica de la línea, mayor será la proporción de ondas reflejadas.

4.13 Velocidad de Fase

Las soluciones de tensión y corriente como ya se ha mencionado y demostrado poseen una dependencia del espacio y del tiempo.

$$V(x,t) = f_1(\omega t - \beta x) + f_2(\omega t + \beta x) \quad (76)$$

Si se determina la tensión para un tiempo t_1 , esta tensión debe quedar determinada para una ubicación espacial x_1 .

$$V(x = x_1, t = t_1) = f_1(\omega t_1 - \beta x_1) + f_2(\omega t_1 + \beta x_1) \quad (77)$$

y para un tiempo t_2 , tal que $t_2 > t_1$, se tiene:

$$V(x = x_2, t = t_2) = f_1(\omega t_2 - \beta x_2) + f_2(\omega t_2 + \beta x_2) \quad (78)$$

Si se considera solo el comportamiento de la onda reflejada o regresiva y se afirman que ambos puntos están en concordancia de fase, pues ambos presentan la misma condición. Entonces la velocidad de propagación depende de ω ; y β , y queda definida como:

$$\omega t + \beta x = \text{const.}$$

y por consiguiente:

$$\omega dt + \beta dx = 0$$

es decir:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\omega}{\beta} = V_f = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En definitiva la velocidad de fase, es la velocidad con la cual se propagan las ondas a lo largo de la línea (V_f).

$$V_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (84)$$

Es importante mencionar que aunque la velocidad con que se propaga una onda en la línea de transmisión es de un valor alto, la velocidad de propagación es finita. En los casos en que las longitud de las líneas aéreas supera los 500 Km. O 250 Km. en el caso de los cables, esta velocidad finita de propagación de las ondas

puede perturbar seriamente la transmisión de energía, y a las cargas conectadas en el extremo de recepción (motores, transformadores, líneas, etc.).

Si se considera una línea de 2500 Km de longitud, el tiempo requerido para que un viaje desde el extremo de envío hasta el de recepción (considerando propagación a la velocidad de la luz 300.000 km/seg), es:

$$t_{viaje} = \frac{2500km}{300.000 \frac{km}{sec}} = 8.33msec$$

El tiempo de viaje de la onda casualmente coincide con un semiperíodo en un sistema que opera a 60 Hz ($T = 16.6 msec$), con lo cual en el extremo de recepción de la línea la tensión denota 180° del extremo de envío. Si el desfase entre estas tensiones llega o excede a los 90° , entonces es factible que se presente peligrosas *sobretensiones por resonancia*.

En el caso de la línea de transmisión sin pérdidas la velocidad de propagación de las ondas se simplifica notablemente.

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{84'}$$

La interpretación en este caso particular de la expresión debe ser cautelosa, debido a que la velocidad de propagación no difiere de una línea a otra, mientras que la capacitancia y la inductancia sí, de hecho estos parámetros dependen de la configuración geométrica de la línea. Esta posible interpretación errónea puede ser obviada si se sustituyen definiciones muy básicas de la inductancia y la capacitancia.

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{r}\right)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{d}{r}\right)}$$

de modo que con las sustituciones apropiada se logra.

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r} \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

si se considera:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-4} \frac{Henrio}{km}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-6} \frac{Faradio}{km}$$

se obtiene que la velocidad de propagación en km por segundo resulta:

$$V_f = \frac{300.000}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \tag{84''}$$

La expresión anterior, evidencia que la velocidad de propagación depende de la permitividad ϵ_r y la permeabilidad magnética μ_r . Se puede realizar la aproximación de que $\mu_r = 1$, ya que los materiales ferromagnéticos con la influencia del campo homónimo no desempeñan un papel importante ni para la línea de transmisión aérea ni para el cable. Por otra parte la permitividad ϵ_r se refiere, se puede suponer también $\epsilon_r = 1$ para las líneas aéreas y $\epsilon_r = 4$ para los cables con aislamiento a base de papel impregnado en aceite.

Bajo las suposiciones anteriores, se puede aproximar en forma típica la velocidad de propagación:

$$V_f = 300 \frac{m}{\mu sec}$$

Líneas aéreas

$$V_f = 150 \frac{m}{\mu sec}$$

Cables con el aislamiento de papel impregnado en aceite

En forma de una referencia muy general, en la practica se consigue:

$$L = 1.67 \text{ mH/Km}, C = 0.0067 \mu\text{F/Km}$$

$$Z_0 = 500 \Omega$$

Líneas aéreas

$$L = 0.33 \text{ mH/Km}, C = 0.1330 \mu\text{F/Km}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

Cables con el aislamiento de papel impregnado

en aceite

Estos valores típicos se presentan con mayor frecuencia en sistemas de media tensión, con un solo conductor de fase y dimensiones típicas; y estos valores no deben ser tomados para cálculos en sistemas semejantes, sino por el contrario se debe realizar un cálculo estricto de estos parámetros. Por último se debe denotar la si vale la diferencia en las impedancias características de la línea aérea y el cable (1:10), motivo por el cual se obligatorio el proteger este último contra ondas viajeras.

4.14 Longitud de Onda o Período Espacial

Las magnitudes β y ω , permiten el cálculo de la velocidad de propagación, lo cual representan la variación de la fase en el espacio. Pero otro aspecto fundamental de onda viajera, es su período temporal (τ), el cual para una onda armónica en el tiempo se define como:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (84)$$

y el período espacial o longitud de onda (λ), es la distancia a lo largo de la línea, que entre dos puntos de una onda difieren en fase 360° .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (85)$$

A la frecuencia de 60 Hz, la longitud de onda es aproximadamente 3000 millas. En el caso de una línea sin pérdida la longitud de onda se simplifica notablemente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} \quad (85')$$

La longitud de onda disminuye al aumentar la frecuencia de operación de la línea. Para, $\lambda = 4L$ la longitud de la línea es casualmente un cuarto de la longitud de onda. De la relación anterior se puede derivar ahora la frecuencia oscilatoria de la línea. Este nombre obedece a que la línea oscila libremente con un cuarto de la longitud de onda, una vez que se desconecta el extremo de transmisión y se conecta a tierra el receptor.

$$f = \frac{1}{4L\sqrt{LC}} \quad (85'')$$

Esta frecuencia oscilatoria desempeña un papel importante en la determinación de la *tensión de recuperación o restablecimiento* de los interruptores de potencia, cuando se debe despejar una falla por cortocircuito en la línea. En el caso $\lambda = 2L$ la longitud de la línea se hace la mitad de la longitud de onda. La onda estacionaria que se obtiene al conectar a tierra ambos extremos de la línea es igualmente una oscilación libre. La velocidad de propagación (V_f), puede ser relacionado con la longitud de onda solo multiplicando por la frecuencia (f).

$$V_f = f\lambda \quad (86)$$

4.15 Potencia Natural

Cuando la línea de transmisión termina en el extremo de recepción en una impedancia diferente a la impedancia característica (Z_0), se observa la presencia de ondas reflejadas; estas ondas sobrecargan innecesariamente a la línea, y las pérdidas en la misma aumentan. Es por ello que se insiste en la necesidad de suprimir las ondas reflejadas, mediante la instalación de una impedancia de carga en magnitud y fase igual a la impedancia característica de la línea.

$$\frac{V_r}{I_r} = Z_{LOAD} = Z_0 \quad (87)$$

Con esta condición terminal impuesta, se puede deducir fácilmente que las expresiones de la tensión y la corriente en la línea se simplifican enormemente:

$$V(x,t) = |A_1| \text{sen}(\omega t - \beta x) \quad (88)$$

$$I(x,t) = \frac{|A_1|}{Z_0} \text{sen}(\omega t - \beta x) \quad (89)$$

Donde estas expresiones demuestran que con esta condición terminal solo existen ondas incidentes o progresivas no amortiguadas. En el caso que la condición terminal cambie, se puede demostrar que a mayor diferencia entre la impedancia de la línea y la de carga, mayor aun será la presencia de ondas estacionarias en el sistema. En cambio, cuando ambas impedancias son iguales, entre sí, se tiene la circulación de intensidad de corriente natural de la línea ($I_{natural}$),

$$I_r = \frac{V_r}{Z_{LOAD}} = \frac{V_r}{Z_0} = I_{natural} \tag{90}$$

La potencia natural que se puede transmitir por la línea resulta:

$$P_{natural} = \frac{V_r^2}{Z_0} \tag{91}$$

Es importante mencionar que en condiciones antes mencionada, la relación V_r/I_r en es constante en toda la línea e igual $V(x,t)/I(x,t)=Z_0$. Desde cualquier punto que se vea la línea, esta parecerá infinitamente larga, debido a que no habrá ondas reflejadas en la línea; y de igual modo el defasaje entre la tensión $V(x,t)$ y la corriente $I(x,t)$ será siempre también igual en todas partes.

Si la potencia que se transmite por la línea, P_r , es mayor que la potencia natural de la misma ($P_r > P_{natural}$), entonces la línea se comporta como una carga inductiva, y en caso contrario, ($P_r < P_{natural}$), como carga capacitiva.

En los sistemas de transmisión reales el comportamiento de la carga varía, de modo que la impedancia de carga cambia constantemente, razón por la cual resulta difícil llevar a cabo el acoplamiento ideal de la línea. Es por esta razón que en la práctica se procede a compensar reactivamente al régimen de carga de la línea de transmisión, conectando y desconectando inductancias (reactores) y bancos de capacitores en ambos extremos del sistema de transmisión; y modernamente se ha incorporado el denominado SVS, Sistema de Compensación Estática (*Static VAR System*), que permite inyectar al sistema de transmisión en forma controlada reactivos inductivos a capacitivos. En el caso del sistema de transmisión venezolano, existen instalados SVS en las subestaciones La Horqueta y San Gerónimo de 765 kV de la empresa EDELCA, los cuales permiten un margen de regulación de 280 MVAR inductivos a 300 MVAR capacitivos.

La potencia máxima que pueden transmitir los sistemas comerciales, sin el empleo de la compensación reactiva, quedan expresados en la siguiente tabla.

Tabla 1. Capacidad de Transmisión en Líneas de Transmisión por Nivel de Tensión

<i>Tensión (kV)</i>	69	115	230	400	800
<i>Impedancia Z (Ω)</i>	400	375	375	250	260
<i>Potencia Natural (MVA)</i>	12	35	140	640	2460

4.16 Longitud Crítica

En el caso de las líneas muy largas se pueden denotar incrementos de tensión muy peligrosos (*sobretensiones*). Especialmente en el caso en que la longitud de la línea es un cuarto de la longitud de onda, en cuyo caso se denomina longitud crítica ($L_{critica}$).

$$L_{critica} = \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2\beta} \tag{92}$$

En el caso particular de que la línea de transmisión no posee pérdidas asociadas ($\alpha = 0$), entonces la constante de fase se transforma en $\beta = \omega\sqrt{LC}$, de modo que la longitud crítica para esta línea puede ser calculada más fácilmente:

$$L_{critica} = \frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}} \tag{93}$$

Teóricamente, la línea sin pérdidas no posee atenuación para las ondas viajeras, de modo que teóricamente se establece una tensión infinita, cuando la longitud de la misma alcanza el valor crítico. Las pérdidas que son inevitables en los sistemas de transmisión, establecen una relación de 1:10 a 1:15, lo cual es bastante considerable y peligroso, en particular en líneas de extra y ultra alta tensión. La operación en vacío de estas líneas de transmisión amerita, por consiguiente, suma atención.

Si se considera la línea sin pérdidas, las ecuaciones de la inductancia en sus formas más elementales resulta:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{d}{r} \right)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\text{Ln} \left(\frac{d}{r} \right)}$$

donde:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-4} \frac{\text{Henrio}}{\text{Km}}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-6} \frac{\text{Faradio}}{\text{Km}}$$

De modo que realizando las sustituciones pertinentes se tiene:

$$L_{\text{crítico}} = \frac{3}{4f} \times 10^5 \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (94)$$

En el caso de una frecuencia de operación de 60 Hz, la longitud crítica de la asciende a 1250 Km. (y a 1500 Km. para el caso de 50 Hz), en el caso de líneas de transmisión aéreas ($\epsilon_r = \mu_r = 1$). En el caso de los cables, estos poseen dieléctrico muy diferentes ($\epsilon_r = 3...5$), la longitud crítica para estos, a una frecuencia de explotación de 60Hz, oscila entre 560 y 720 Km.

Se debe mencionar sin mayor demostración, que las líneas muy largas confrontan eventualmente problemas de estabilidad; los cuales limitan la extensión de las mismas a 1000 Km. como máximo.

4.17 Interpretación de las Ecuaciones de Líneas Largas

Portase de las ecuaciones que rigen el comportamiento de la tensión y la corriente en una línea de transmisión.

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \quad (48)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) \quad (49)$$

La constante γ , se denomina constante de propagación, la cual es un número complejo que operacionalmente implica la raíz del producto de la impedancia serie de la línea Z , y la admitancia capacitiva Y .

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (46)$$

La componente real y positiva de la constante de propagación recibe el nombre de *constante de atenuación*, α , midiéndose en unidades de neper por unidad de longitud, mientras que la parte imaginaria β , se denomina *constante de fase*, midiéndose en unidades de radianes por unidad de longitud.

Si se realiza la definición de constante de propagación en las soluciones de tensión y corriente de la línea.

$$V(x, \omega) = A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (48)$$

$$I(x, \omega) = \frac{1}{Z_o} (A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}) \quad (49)$$

Ahora bien, si se determinan las constantes de integración A_1 y A_2 , para las condiciones terminales del extremo de envío $x = 0$.

$$A_1 = \frac{(V_s + Z_o I_s)}{2} \quad (52)$$

$$A_2 = \frac{(V_s - Z_o I_s)}{2} \quad (53)$$

se tiene que las ecuaciones se convierte en:

$$V(x, \omega) = \frac{(V_s + Z_o I_s)}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \frac{(V_s - Z_o I_s)}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (95)$$

$$I(x, \omega) = \frac{\left(\frac{V_s}{Z_0} + I_s\right)}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{\left(\frac{V_s}{Z_0} - I_s\right)}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (96)$$

Las propiedades de los exponenciales, $e^{\alpha x}$ y $e^{j\beta x}$, permiten explicar las variaciones de la tensión y la corriente en cualquier instante, en función de la ubicación espacial de un punto a lo largo de la línea. El término $e^{\alpha x}$, cambia de valor a medida que la posición espacial (x) varía, por su parte $e^{j\beta x}$, es igual a $\cos(\beta x) + j\text{sen}(\beta x)$, siempre vale 1, produciendo una fase β radianes por unidad de longitud de la línea.

El segundo término de la expresión (95), $\frac{(V_s - Z_0 I_s)}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x}$, aumenta su valor y adelanta en fase, a medida que aumenta la distancia al extremo de envío. Por el contrario, cuando se avanza a lo largo de la línea desde el extremo de recepción, disminuye en valor absoluto y, a la vez, va retrasando en fase.

Esta es la característica de una onda progresiva o incidente; análoga al comportamiento de una onda en el agua que en un punto varía de amplitud con el tiempo, a la vez que se retrasa en fase y su valor máximo disminuye con la distancia al final de la línea. La variación del valor instantáneo no está expresado en el término, pero se comprende, puesto que V_r e I_r son fasores. El segundo término de la expresión (95), recibe el nombre de *tensión incidente*.

El primer término de la expresión (95), $\frac{(V_s - Z_0 I_r)}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$, disminuye en magnitud y se retrasa en fase desde el extremo de envío al extremo de recepción. Se le llama *tensión reflejada*. En cualquier punto de la línea, la tensión es la suma de las componentes incidentes y reflejadas en ese punto. En la expresión de corriente (96), es análogo a la de tensión, también se puede considerar como compuesta por las corrientes incidentes y reflejadas. Si la línea de transmisión se le coloca en el extremo de recepción una impedancia de carga de valor igual a la impedancia característica de la línea, la tensión en el extremo de recepción V_r , es igual a $Z_0 I_r$, y no existe onda reflejada de tensión ni de corriente.

Una línea terminada en la impedancia característica, se denomina comúnmente línea plana o línea infinita. Esta denominación se deriva del hecho de que si la línea posee una longitud infinita no puede poseer onda reflejada. En el caso de las líneas de transmisión de potencia, no termina en su impedancia característica, debido a que la impedancia de la carga es función de la demanda del consumidor, la cual es variable; en cambio las líneas de comunicaciones se terminan en la impedancia característica para eliminar las reflexiones. Un valor típico de la impedancia característica en líneas de transmisión aéreas es de 400 Ohmios, para un solo circuito, y 200 Ohmios para una de los circuitos en paralelo. El ángulo de fase de la impedancia característica normalmente está comprendido entre 0° y -15° . Las líneas de conductores agrupados tienen valores inferiores a la impedancia característica puesto que dichas líneas tienen una inductancia inferior y una capacitancia a las de las líneas de un solo conductor por fase.

En el trabajo de sistemas de transmisión, la impedancia característica, se denomina comúnmente *impedancia de sobretensión*. Sin embargo, este término se reserva, normalmente, para el caso especial de una línea sin pérdidas; en cuyo caso la conductancia y la resistencia son cero, con lo que la impedancia característica se reduce a $\sqrt{L/C}$, resistencia pura.

En los casos en que la línea de transmisión operan a alta frecuencia; o con sobretensiones atmosféricas (rayos), suele frecuentemente despreciarse las pérdidas, siendo de importancia la impedancia de sobretensión. La carga de la *impedancia de sobretensión* (SIL) de una línea de transmisión es la potencia suministrada por está a la carga, óhmica pura, igual a su impedancia de sobretensión. Al colocar una carga de este valor, la línea suministra una corriente que puede ser determinada como:

$$|I_r| = \frac{|V_r|}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (97)$$

debido a que la impedancia de sobretensión es óhmica pura, se tiene:

$$SIL = \frac{|V_r|^2}{\sqrt{\frac{L}{C}}} [MW] \quad \text{dado } V_r \text{ en kV} \quad (98)$$

En ocasiones se suele expresar la potencia transmitida por la línea por unidad del SIL, esto es, como la relación de la potencia transmitida y la carga de la impedancia de sobretensión. Con la utilización de fracciones del SIL, puede expresarse la carga permisible por la línea, permitiendo una comparación entre las capacidades de transporte de las líneas.

4.18 Modelos Equivalentes en T y Π , Exactos para Líneas Largas

Las soluciones de las ecuaciones características para tensión y corriente en la línea de transmisión, si bien son válidas desde el punto de vista matemático, tienen el inconveniente que no poseen directamente una interpretación circuital; que permita visualizar la relación entre los parámetros eléctricos terminales de la línea. En la idea, se construye un equivalente circuital para las ecuaciones, de modo que en base a las ecuaciones antes determinadas permitan numéricamente el cálculo de parámetros terminales de la línea. Los circuitos equivalente básicos de mayor utilización por su simetría y simplicidad por el número de elementos, son el circuito equivalente en T y el Π .

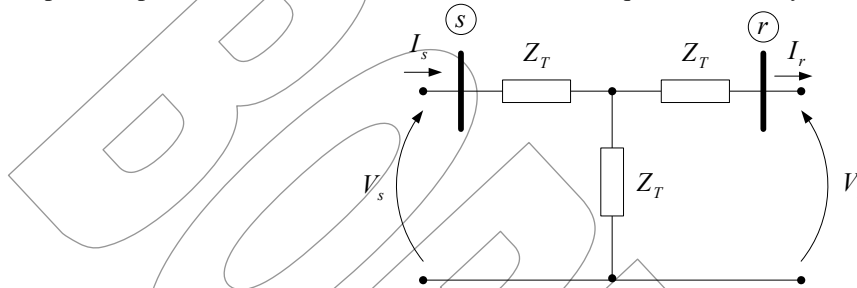


Figura 15. Modelo Equivalente T

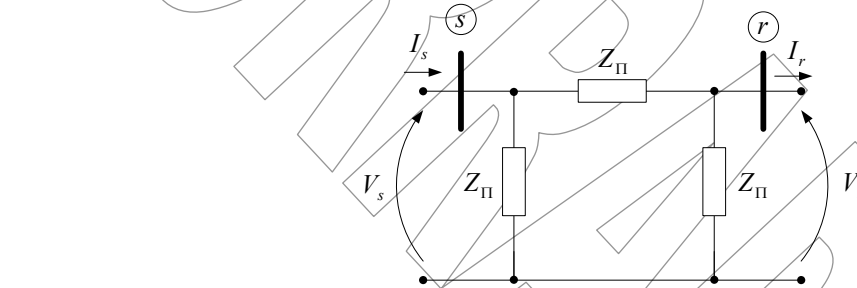


Figura 16. Modelo Equivalente Π

En los problemas típicos de sistemas de potencia, se prefiere el uso del circuito equivalente Π , para evitar la existencia de un nodo ficticio como ocurre en el circuito equivalente T. Si inicialmente se toma el circuito equivalente T, y se procede a aplicar las ecuaciones de Kirchhoff; donde se supone que en el nodo ficticio de las ramas del modelo se supone una corriente I_x , se tiene:

$$I_s = I_x + I_r \quad (99)$$

$$V_s = I_s Z_T + \frac{I_x}{Y_T} \quad (100)$$

$$I_x = \frac{(Z_T I_r + V_r)}{Y_T} \quad (101)$$

Realizando las operaciones adecuadas de las ecuaciones se puede reducir estas ecuaciones a un sistema matricial.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_T Y_T & Z_T (2 + Z_T Y_T) \\ Y_T & 1 + Z_T Y_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (102)$$

Si este sistema se compara con la solución vectorial de la ecuación característica de la línea.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & Z_0 \sinh(\gamma L) \\ \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (67)$$

realizando la comparación término a término surge:

$$\begin{aligned} 1 + Z_T Y_T &= \cosh(\gamma L) \\ Z_T (2 + Z_T Y_T) &= Z_0 \sinh(\gamma L) \\ Y_T &= \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} \end{aligned} \quad (103)$$

de aquí se pueden obtener fácilmente los valores de los elementos del modelo Y_T y Z_T , en función de los parámetros característicos de la línea γL y Z_0 .

$$Z_T = \frac{Z_0 \cosh(\gamma L) - 1}{\sinh(\gamma L)} \quad (104)$$

$$Y_T = \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} \quad (105)$$

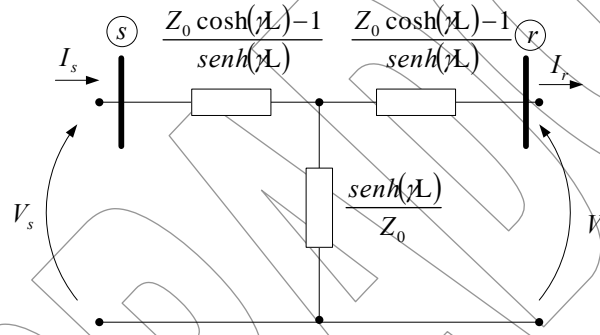


Figura 17. Modelo Equivalente T

En el caso del circuito equivalente Π , se pueden plantear las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema por medio de las leyes de Kirchoff.

$$V_s = (I_Y + I_r) Z_{\Pi} + V_r \quad (106)$$

$$I_s = I_Y + I_Y + I_r \quad (107)$$

$$I_Y = Y_{\Pi} V_r \quad (108)$$

Realizando el respectivo manejo algebraico para construir en forma matricial las ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y_{\Pi} Z_{\Pi} & Z_{\Pi} \\ Y_{\Pi} (2 + Z_{\Pi} Y_{\Pi}) & 1 + Y_{\Pi} Z_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (109)$$

Si se procede a comparar término a término con las soluciones de las ecuaciones características en forma hiperbólica.

$$\begin{aligned} 1 + Z_{\Pi} Y_{\Pi} &= \cosh(\gamma L) \\ Z_{\Pi} &= Z_0 \sinh(\gamma L) \\ Y_{\Pi} (2 + Z_{\Pi} Y_{\Pi}) &= \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} \end{aligned} \quad (110)$$

De estas ecuaciones se desprenden fácilmente los términos del modelo equivalente Π .

$$Y_{\Pi} = \frac{\cosh(\gamma L) - 1}{Z_0 \sinh(\gamma L)} \quad (111)$$

$$Z_{\Pi} = Z_0 \sinh(\gamma L) \quad (112)$$

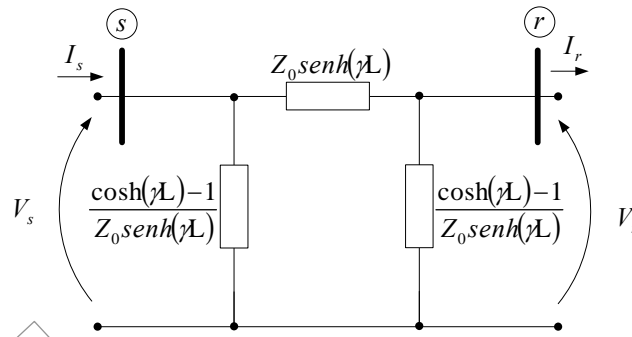


Figura 18. Modelo Equivalente Π

Algunas transformaciones matemáticas resultan prácticas, respecto a los parámetros del modelo Π .

$$Z_{\Pi} = Z_0 \sinh(\gamma L) = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sinh(\gamma L)$$

$$Z_{\Pi} = ZL \frac{\sinh(\gamma L)}{\gamma L} \quad (113)$$

$$Z_{\Pi} = Z_{LT} \frac{\sinh(\gamma L)}{\gamma L} \quad (113')$$

siendo:

$$Z_{LT} = ZL$$

donde Z_{LT} , es la impedancia total de la línea. Por otra parte, se conoce que:

$$Y_{\Pi} = \frac{\cosh(\gamma L) - 1}{Z_0 \sinh(\gamma L)} \quad (111)$$

Se conoce que existe una identidad matemática hiperbólica muy útil.

$$\frac{\cosh(\gamma L) - 1}{\sinh(\gamma L)} = \tanh\left(\frac{\gamma L}{2}\right)$$

De modo que al ser sustituida en (111) se tiene:

$$Y_{\Pi} = \frac{1}{Z_0} \tanh\left(\frac{\gamma L}{2}\right) \quad (114)$$

$$Y_{\Pi} = \frac{1}{Y_{LT}} \frac{\tanh\left(\frac{\gamma L}{2}\right)}{\gamma L} \quad (114')$$

Aunque ambos circuitos equivalentes cumplen con la misma función, la forma de los mismos es distintas y en sistemas de potencia, se prefiere el uso del modelo Π , ya que el tipo T posee asociado un nodo ficticio, que añade un nodo no existente al sistema, incrementando el número global de nodos del sistema.

Un error muy frecuente al emplear el modelo Π , es considerar que la intensidad de corriente que circula por el elemento Z_{LT} , rama serie del modelo, es la corriente que circula por la línea, lo cual se encuentra totalmente errado, debido a que con el modelo solo se pueden determinar condiciones terminales y en ningún momento en puntos medios; para lo cual se deben emplear las ecuaciones matemáticas.

Por tanto, para evitar malas interpretaciones de los modelos se debe dejar bien claro: No existe un solo valor de la corriente que circula por la línea, ya que esta varía en cada punto de la línea, y mal se podría hablar de una corriente única, sino que se debe ser específico en que punto del espacio, x , en la línea se trata. Lo que si es verdad, es que se puede determinar la corriente en los extremos de la línea, es decir, la corriente que entra al extremo de envío del sistema de transmisión y la que sale de él por el extremo de recepción. Solamente en aquellas líneas, donde la longitud es muy pequeña, se puede afirmar que la corriente en el extremo de envío es solo aproximadamente igual a la del extremo de recepción; y en consecuencia se puede

hablar no formalmente de una corriente única que circula por la línea; porque en la realidad esto no es totalmente cierto.

4.19 Modelos Equivalentes Aproximados para Líneas Largas

La solución de la ecuación característica de la línea, involucra el cálculo de funciones hiperbólicas con argumentos de álgebra compleja. Esto hace años involucraba la necesidad de realizar cálculos por medios de gráficas especialmente desarrolladas, o incluso el uso de computadoras. Hoy por hoy, el calculo de las funciones hiperbólicas complejas aunque se ha hecho más sencillo, aun así en ocasiones su evaluación se hace tediosa, y los programas para computadoras requieren se subrutinas aparte de para los cálculos requeridos, lo que incrementa a valores prohibitivos los tiempos de calculo; aunque se hizo esto más evidente en el pasado; aun hoy puede ser una adversidad el tener que evaluar estas funciones.

Un mecanismo elemental para subsanar los cálculos del álgebra compleja para funciones hiperbólicas; es el emplear el desarrollo de los senos y cosenos hiperbólicos de variable compleja en función de los senos y cosenos circulares e hiperbólicos de variable real.

$$\cos(\alpha L + j\beta L) = \cosh(\alpha L)\cos(\beta L) + j\sinh(\alpha L)\sen(\beta L) \tag{113}$$

$$\sen(\alpha L + j\beta L) = \sinh(\alpha L)\cos(\beta L) + j\cosh(\alpha L)\sen(\beta L) \tag{114}$$

Estas identidades matemáticas permiten el cálculo de las funciones hiperbólicas con argumentos complejos. La unida correcta de βL , es el radian que es la unidad encontrada al realizar el calculo de la parte imaginaria de γL .

Un mecanismo alternativo para el calculo de las funciones hiperbólicas con argumento complejo, se deriva de las definiciones en términos exponenciales de las funciones:

$$\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{e^\alpha e^{j\beta} + e^{-\alpha} e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^\alpha \angle \beta + e^{-\alpha} \angle -\beta) \tag{115}$$

$$\sinh(\alpha + j\beta) = \frac{e^\alpha e^{j\beta} - e^{-\alpha} e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^\alpha \angle \beta - e^{-\alpha} \angle -\beta) \tag{116}$$

Ahora bien otro mecanismo, para el cálculo de las funciones hiperbólicas con argumento complejo, es el desarrollo de estas en series de Mclaurin.

$$\cosh(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots \tag{117}$$

$$\sinh(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots \tag{118}$$

Estas series convergen rápidamente para los valores de γL , que se presentan corrientemente en las líneas de transmisión, y se logra una precisión suficiente con el uso de pocos términos de la misma. Como aproximación se acostumbra tomar los dos primeros términos del desarrollo de $\cosh \theta$ y el primer término de la función $\sinh \theta$, de modo que para la solución de las ecuaciones características, resulta una aproximación:

$$\cosh(\gamma L) \approx 1 + \frac{(\gamma L)^2}{2} \tag{119}$$

$$\sinh(\gamma L) \approx \gamma L \tag{120}$$

Si se sustituye estas aproximaciones en las expresiones que determinan los parámetros del modelo se tiene

$$Z_T = \frac{Z_0 \cosh(\gamma L) - 1}{\sinh(\gamma L)} = \frac{Z}{2} L$$

$$Y_T = \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_0} = YL$$

$$Y_{\Pi} = \frac{Z_0 \cosh(\gamma L) - 1}{\sinh(\gamma L)} = \frac{Y}{2} L \tag{111}$$

$$Z_{\Pi} = Z_0 \sinh(\gamma L) = ZL \tag{112}$$

Estas aproximaciones han resultado muy populares por la tremenda simplificación de los cálculos involucrados en comparación al cálculo de las funciones hiperbólicas. Por otra parte, se ha demostrado en la práctica que la longitudes actuales de las líneas, salvo casos excepcionales de líneas extremadamente largas, que los resultados obtenidos con estas aproximaciones, no difieren sustancialmente de aquellos obtenidos con las expresiones exactas.

Y a favor de la pérdida de exactitud en el uso de estas aproximaciones, de debe mencionar que en el calculo de los parámetros de la línea, Z y Y , ya existe un error intrínseco en algunos supuestos que se relacionan; horizontalidad de los conductores sobre el plano de tierra, transposición perfecta, etc., lo cual aunque se empleen las expresiones más exactas afectan los resultados. En el caso que se empleen estas aproximaciones los modelos reciben el nombre de *modelos nominales* o *modelos aproximados*.

4.20 Modelo de la Línea Media

En longitudes medias, la admitancia que se hace apreciables es de naturaleza capacitiva, y esta debe ser incluida en los cálculos. Aunque la capacitancia resulta apreciable, la longitud de la línea aun no es comparable con la longitud de onda, de modo que los tiempos de propagación son despreciables y se hace posible el uso de los parámetros concentrados para la construcción de un circuito equivalente para la línea. Si la admitancia total es dividida en dos partes iguales colocadas en los extremos del modelo, se construye un modelo Π .

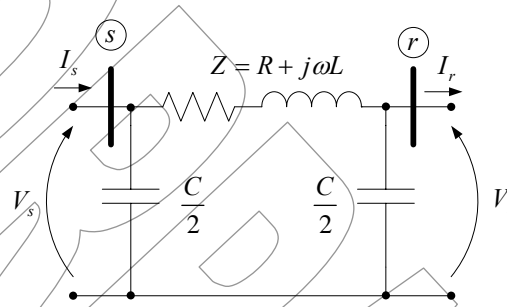


Figura 19. Modelo Equivalente de una Línea Media

Si se aplica la ley de corrientes de Kirchoff en el extremo de recepción se tiene:

$$\frac{V_s - V_r}{Z} = V_r \frac{Y}{2} + I_r$$

$$V_s = \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) V_r + ZI_r \quad (114)$$

Al aplicar la ley de corrientes en el extremo de envío se logra:

$$I_s = V_s \frac{Y}{2} + V_r \frac{Y}{2} + I_r$$

$$I_s = \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) YV_r + I_r \quad (115)$$

En forma matricial se puede deducir, los parámetros de envío en función de los parámetros de los extremos de recepción.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) & Z \\ Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) & \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (116)$$

En forma general los parámetros de transmisión de la línea de transmisión de longitud media, quedan simplificados.

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$\mathbf{V}_{\text{ENVÍO}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\text{RECEPCIÓN}} \quad (118)$$

donde \mathbf{T} es lo parámetros de transmisión y sus elementos quedan definidos por:

$$\begin{aligned} A &= D = \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) \\ B &= Z \\ C &= Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) \end{aligned} \quad (119)$$

Las constantes A , B , C y D algunas veces se conocen como constantes generalizadas de la línea de transmisión; siendo números complejos. Las constantes A y D son adimensionales e iguales entre sí, si la línea es la misma cuando se ve desde cualquier terminal. Por su partes las constantes B y C están expresadas en unidades de Ohmios y Mhos, respectivamente. En este caso los parámetros A , B , C y D solo permiten determinar los parámetros terminales de la línea de transmisión y en ningún momento el modelo permite inferir información en puntos distintos a los extremos.

Es importante resaltar el hecho de que las constantes generalizadas, permite obtener relaciones muy simples para las tensiones y las corrientes.

$$V_r = \frac{DV_s - BI_s}{AD - BC} \quad (120)$$

$$I_r = \frac{AV_s - CI_s}{AD - BC} \quad (121)$$

En forma matricial queda más compacto quedando:

$$\begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$\mathbf{V}_{\text{RECEPCIÓN}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}_{\text{ENVÍO}} \quad (123)$$

donde \mathbf{T}^{-1} es la inversa de la matriz de transmisión de la línea de transmisión.

$$[\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \quad (124)$$

Un significado físico puede ser asignado con relativa facilidad a las constantes. Si se considera la corriente de recepción cero ($I_r = 0$), se cumple que la constante A , es la relación entre la tensión de envío y recepción en vacío (V_s/V_r); por otra parte, la constante B , es la relación entre la tensión de envío y la corriente de recepción (V_s/I_r), cuando la línea se encuentra con su extremo de recepción en condición de cortocircuito ($V_r = 0$).

De lo antes expuesto se evidencia la importancia de la constante A para el calculo de la regulación de la línea.

$$\% \text{ Regulación} = \frac{|V_{r0}| - |V_r|}{|V_r|} \times 100\% \quad (2)$$

donde el voltaje de la línea en vacío puede ser calculado fácilmente.

$$\% \text{ Regulación} = \frac{|A||V_s| - |V_r|}{|V_r|} \times 100\% \quad (125)$$

siendo V_r , la tensión a plana carga en el extremo de recepción.

Para el modelo T pueden deducirse ecuaciones semejantes. Solo que el modelo T supone todo el parámetro de admitancia concentrado en un punto medio del circuito equivalente; separando dos ramas cada una con la mitad de impedancia serie.

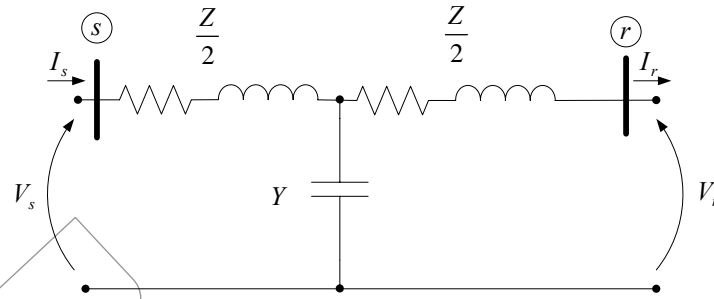


Figura 20. Modelo Equivalente T para una Línea Media

Es importante dejar muy claro, el hecho de que el modelo Π o T, no representan la línea real, por lo que en los casos de duda sobre la longitud de la línea, es mejor emplear el modelo de la línea larga, que si bien agrega un poco de más de calculo, mejora la precisión.

Los modelos Π o T no son equivalentes como puede verse por la aplicación de las ecuación de transformación Y- Δ a cada uno de ellos. Lo que si es bien cierto, es el hecho de que los modelos Π y T, se aproximan más entre sí y al circuito equivalente de la línea, cuando esta se divide en dos o más secciones cada una de ellas modeladas por circuitos Π o T.