

Comparación de Métodos Numéricos para la Solución Ecuación Diferencial de 1^{er} Orden

Francisco M. Gonzalez-Longatt

Resumen—Este documento presenta un comparación de los resultados obtenidos por tres métodos numéricos: Euler, Runge-Kutta 2do orden, y Runge-Kutta 4to orden, en la solución de la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden $y'(x)=y$, $y(0)=1$. La comparación es efectuada para diferentes números de subintervalos, mostrando el mejor

Índice de Términos— Ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, Euler, Runge-Kutta.

I. GENERALIDADES

Considere la Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden a condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0,1] \quad (1)$$

Se supone que la función $y(x)$ es continua sobre $x \in [0,1]$.

II. MÉTODO DE EULER

Para $n = 5$, empleando el método de Euler se tiene:

X =
0 0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000
Y =
1.0000 1.2000 1.4400 1.7280 2.0736 2.4883

Comparando con el valor real $e^1 - Y(1) = 0.23$. El error absoluta resulta ser: $\varepsilon_{abs} = 0.23$. Para $n = 50$; se tiene:

Y =
Columns 1 through 9
1.0000 1.0200 1.0404 1.0612 1.0824 1.1041 1.1262 1.1487 1.1717
Columns 10 through 18
1.1951 1.2190 1.2434 1.2682 1.2936 1.3195 1.3459 1.3728 1.4002
Columns 19 through 27
1.4282 1.4568 1.4859 1.5157 1.5460 1.5769 1.6084 1.6406 1.6734
Columns 28 through 36
1.7069 1.7410 1.7758 1.8114 1.8476 1.8845 1.9222 1.9607 1.9999
Columns 37 through 45
2.0399 2.0807 2.1223 2.1647 2.2080 2.2522 2.2972 2.3432 2.3901
Columns 46 through 51
2.4379 2.4866 2.5363 2.5871 2.6388 **2.6916**

El error resulta ser: $\varepsilon_{abs} = 0.0267$. El trazado del error

Manuscrito terminado el 23 de Febrero de 2005.

F. G. L. Está con la Universidad Experimental Politécnica de la Fuerza Armada, Carretera Nacional Maracay-Mariara, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Maracay, Estado Aragua, Venezuela, Tlf. +58-243-5546951, Fax: +58-243-5546921, E-mail: fglongatt@ieeee.org.

Es candidato a Doctor en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, Los Chaguaramos, Caracas, Venezuela, Tlf. +58-414-4572832, E-mail: flongatt@elecisc.ing.ucv.ve.

absoluto para un número superior de subintervalos resulta:

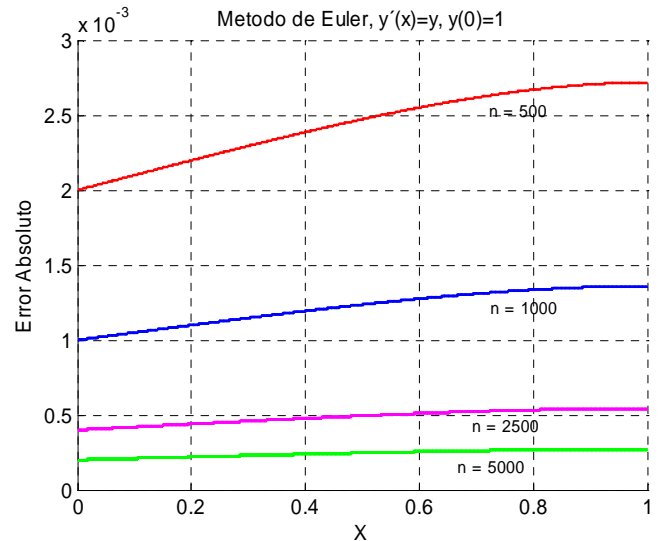


Fig. 1. Comparación del error absoluto con el método de Euler, medido a la solución analítica, para $n = \{ 500, 1000, 2500, 5000 \}$

III. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2^{DO} ORDEN

Empleando Runge-Kutta de segundo orden, para $n = 5$:

X =
0 0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000
Y =
1.0000 1.2200 1.4884 1.8158 2.2153 2.7027

El error absoluta resulta ser: $\varepsilon_{abs} = 0.0156$. Para $n = 50$; se tiene:

Y =
Columns 1 through 9
1.0000 1.0202 1.0408 1.0618 1.0833 1.1052 1.1275 1.1503 1.1735
Columns 10 through 18
1.1972 1.2214 1.2461 1.2712 1.2969 1.3231 1.3498 1.3771 1.4049
Columns 19 through 27
1.4333 1.4622 1.4918 1.5219 1.5527 1.5840 1.6160 1.6487 1.6820
Columns 28 through 36
1.7159 1.7506 1.7860 1.8220 1.8589 1.8964 1.9347 1.9738 2.0137
Columns 37 through 45
2.0543 2.0958 2.1382 2.1814 2.2254 2.2704 2.3162 2.3630 2.4108
Columns 46 through 51
2.4595 2.5091 2.5598 2.6115 2.6643 **2.7181**

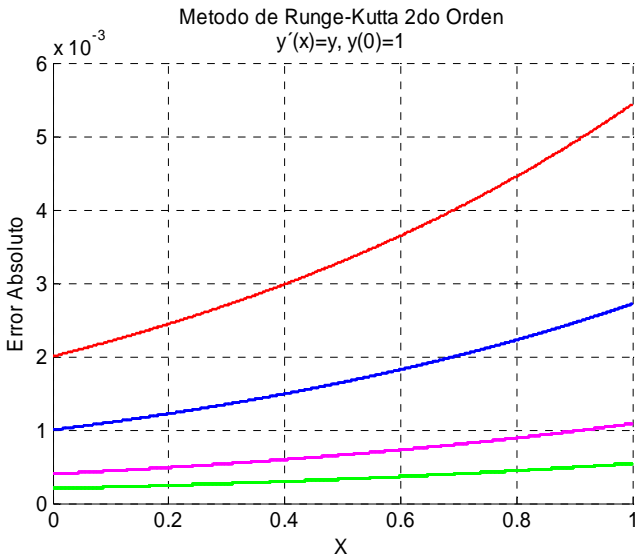


Fig. 2. Comparación del error absoluto con el método de Runge-Kutta 2^{do} Orden, medido a la solución analítica, para $n = \{ 500, 1000, 2500, 5000 \}$

IV. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4^{TO} ORDEN

Empleando Runge-Kutta de cuarto Orden $n = 5$:

X =
 0 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000
 Y =
 1.0000 1.2214 1.4918 1.8221 2.2255 2.7183

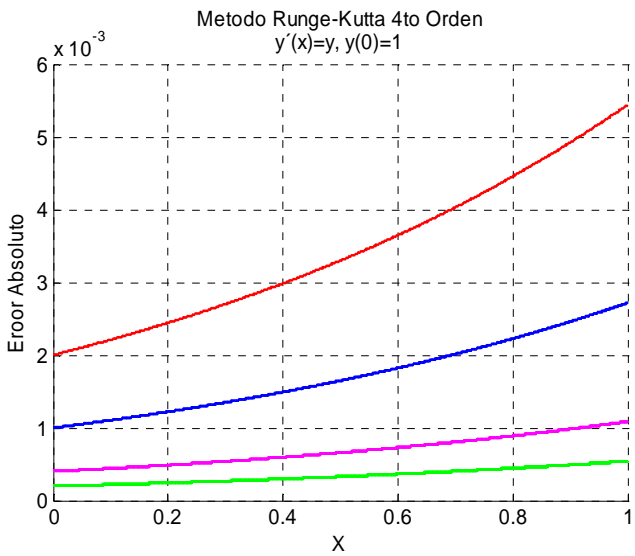


Fig. 3. Comparación del error absoluto con el método de Runge-Kutta 4^{do} Orden, medido a la solución analítica, para $n = \{ 500, 1000, 2500, 5000 \}$

El error absoluta resulta ser: $\epsilon_{abs} = 1.8175 \times 10^{-5}$. Para $n = 50$; se tiene:

Y =
 Columns 1 through 9
 1.0000 1.0202 1.0408 1.0618 1.0833 1.1052 1.1275 1.1503 1.1735
 Columns 10 through 18
 1.1972 1.2214 1.2461 1.2712 1.2969 1.3231 1.3499 1.3771 1.4049
 Columns 19 through 27
 1.4333 1.4623 1.4918 1.5220 1.5527 1.5841 1.6161 1.6487 1.6820

Columns 28 through 36
 1.7160 1.7507 1.7860 1.8221 1.8589 1.8965 1.9348 1.9739 2.0138
 Columns 37 through 45
 2.0544 2.0959 2.1383 2.1815 2.2255 2.2705 2.3164 2.3632 2.4109
 Columns 46 through 51
 2.4596 2.5093 2.5600 2.6117 2.6645 2.7183

V. COMPARACIÓN

Al efectuar el trazado del error absoluto en la solución de la ecuación diferencial (1) para un mismo paso de integración ($n=10$), para los diferentes métodos de integración: Euler, Runge-Kutta de 2^{do} y 4^{to} orden, se evidencia, que los métodos que presentan mayor error son: Euler, Runge Kutta de 2^{do} y de 4^{to} orden en ese mismo orden de mayor a menor.

Comparación entre Metodos Numericos
 $y'(x)=y, y(0)=1, n=10$

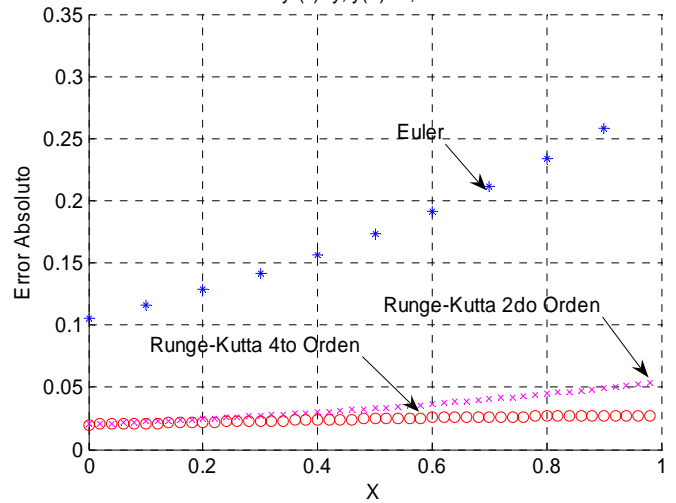


Fig. 4.

Y eso es consistente con la teoría que afirma que el error de Euler es $O(h)$, mientras que para Runge Kutta de 2^{do} y 4^{to} orden son $O(h^3)$ y $O(h^5)$, respectivamente.

TABLA 1
 RESULTADOS CON LOS DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS

i	x_i	$Y(x_i)$	$Y(x_i)$	$Y(x_i)$
		Euler	Runge-Kutta 2 ^{do} Orden	Runge-Kutta 4 ^{do} Orden
0	0	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.2	1.2000	1.2200	1.2214
2	0.4	1.4400	1.4884	1.4918
3	0.6	1.7280	1.8158	1.8221
4	0.8	2.03736	2.2153	2.2255
5	1	2.4883	2.7027	2.7183

REFERENCIAS

[1] "Apuntes de Computación Científica II Métodos EDO - Problemas de valores iniciales". Disponible en: <http://www.ii.uam.es/~pedro/ccii/teoria/MetodosEDOInicial/MetodosEDOInicial.htm>

ANEXOS

Se cree adecuado agregar a este documento, un resumen de los diferentes métodos numéricos aplicados a la resolución de ecuaciones diferenciales. Este anexo a sido tomado por completo de [1].

A. Método de Taylor

1. Resolución de EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

2. Uso del desarrollo de Taylor de la función:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{1}{2!} h^2 f'_i + \dots + \frac{1}{n!} h^n f_i^{(n-1)}$$

$$f_i = f(x_i, y_i) = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(x_i, y_i)}$$

$$f'_i = f'(x_i, y_i) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{(x_i, y_i)}$$

...

(concepto de derivada total)

3. Error (de truncamiento) de orden n+1:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y_{i+1} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \xi = y_{i+1} + O(h^{n+1})$$

4. Problemas

1. Diferenciación de f(x,y) puede ser complicada: uso de programas de cálculo simbólico

B. Método de Euler (forward)

1. Método de Taylor de orden 1 (error de orden O(h²)):

$$y_{i+1} = y_i + hf_i ; y(x_{i+1}) = y_{i+1} + O(h^2)$$

2. Interpretación geométrica:

1. Aproximación de la solución por la recta tangente
2. Solución calculada es polilínea con lados igual a rectas con pendiente f_i en el intervalo [x_i, x_{i+1}]

3. Problemas de estabilidad y de exactitud (convergencia)

4. Método de Euler backward (ecuación implícita)

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}$$

C. Métodos de Runge-Kutta

1. Objetivo: evitar cálculo de derivadas de f(x,y), a base de calcular f(x,y) en más puntos, manteniendo el orden del error y la complejidad de cálculo

1. métodos de orden 2, 3 y 4 requieren el cálculo de f(x,y) en 2, 3 y 4 puntos respectivamente
2. métodos de orden m > 4 requieren el cálculo de f(x,y) en más de m puntos (no más de m+2)

2. Uso de función de incremento $\phi(x_i, y_i, h)$, aproximación de f(x,y) en intervalo [x_i, x_{i+1}]

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h)$$

3. Deducción de Runge-Kutta de orden 2 (RK-2)

$$\phi = ak_1 + bk_2$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + qhf(x_i, y_i)) = f(x_i + ph, y_i + qhk_1)$$

$$4. y_{i+1} = y_i + h(ak_1 + bk_2)$$

1. Se expande por Taylor k₂, y se iguala desarrollo de Taylor de y_{i+1} en función de parámetros a, b, p y q con el desarrollo estándar término a término

$$2. a + b = 1 ; bp = \frac{1}{2} ; bq = \frac{1}{2}$$

5. Métodos de Runge-Kutta de orden 2 (error de O(h³))

1. Para a=b=1/2: promedio de tangentes en extremos (RK2-promedio)

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \bar{y}_{i+1}))$$

2. Para a=0, b=1: estimación de tangente en punto medio (midpoint method) (RK2-punto-medio)

$$\bar{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_{i+\frac{1}{2}})$$

3. Métodos predictor-corrector

4. **¡OJO!** Al implementar el algoritmo, no usar las mismas variables para y_i y para $\bar{y}_{i+\frac{1}{2}}$; ambas son necesarias para calcular y_{i+1}

6. Métodos de Runge-Kutta de orden 3 (error de O(h⁴))

1. Promedio de tangente en extremos y punto medio

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + 2hk_2 - hk_1)$$

7. Métodos de Runge-Kutta de orden 4 (error de O(h⁵))

1. Método atribuido a Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

8. **RK3 y RK4 se reducen a fórmula de Simpson de integración (interpolación parabólica de 3 puntos), cuando f(x,y) es función sólo de x:**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + O(h^5 f^{(4)})$$

$$a = x_i \quad ; \quad b = x_i + h$$

$$\int_a^b f = y_{i+1} - y_i$$

D. Método de Runge-Kutta adaptativo

1. **Duplicación de paso (step doubling)**

1. Se repite estimación de y(x+2h) con 2h (y¹) y con h (y²)
2. Estimación del error: $\Delta = y^2 - y^1$
3. Extrapolación local para aumentar el orden del método
Ejemplo de RK4:
$$y(x + 2h) = y^2 + \frac{\Delta}{15} + O(h^6)$$

2. **RK embebido (métodos Runge-Kutta-Fehlberg)**

1. Se aprovechan las evaluaciones de f(x,y) (las k_i) de un método de orden superior para calcular una aproximación de orden inferior (método embebido en el anterior)

3. Ejemplo de RK5 con RK4 embebido

$$y_{i+1}^1 = y_i + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4 + c_5 k_5 + c_6 k_6) + O(h^6)$$

$$y_{i+1}^2 = y_i + h(c_1^* k_1 + c_2^* k_2 + c_3^* k_3 + c_4^* k_4 + c_5^* k_5 + c_6^* k_6) + O(h^5)$$

$$\Delta = y_{i+1}^1 - y_{i+1}^2 = h \sum_{n=1}^6 (c_n - c_n^*) k_n$$

1. Extrapolación local al tomar y_{i+1}¹ cuando en realidad el error se le estima a y_{i+1}²

4. **Estimación de siguiente paso de integración h**

1. Si $\Delta \propto h^5$ (ejemplos anteriores)
$$h_{siguiente} = h_{actual} \left| \frac{\Delta_{deseado}}{\Delta_{actual}} \right|^{1/5}$$
2. Estimación nos da nuevo h para recalcular y_{i+1} si error era muy grande (mayor que la precisión deseada), o para calcular y_{i+2} si era muy pequeño

5. **Errores fraccionales (i.e., número de cifras**

significativas) para fijar $\Delta_{deseado}$: respecto de valor actual de y, máximo de y (conocido o estimado), etc.

E. Método del punto medio (midpoint) modificado

1. **Método del punto medio también conocido como "centered difference" o "leapfrog"**

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

1. Método de segundo orden con sólo una evaluación de f(x,y)

2. **Método del punto medio modificado (en los extremos)**

$$z_0 = y(x_0)$$

$$z_1 = z_0 + hf(x_0, z_0)$$

$$z_{i+1} = z_{i-1} + 2hf(x_0 + ih, z_i)$$

$$y_n = \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + hf(x_0 + nh, z_n)]$$

3. **Error sólo depende de potencias pares de h**

$$y_n - y(x_0 + nh) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h^{2i}$$

1. Con técnicas similares a la integración de Simpson se puede aumentar el orden de la aproximación con poco coste

$$\frac{4y_n^h - y_n^{2h}}{3}$$

2. Ejemplo de orden 4:

4. **Aplicación en el método de Richardson**

F. Método de extrapolación de Richardson

1. **Idea similar a paso de integración de Simpson a la de Romberg (aproximación diferida al límite de Richardson)**

1. Se estima valor de y(x₀+nh) para distintos pasos de integración (y distintos valores de n: H=nh=cte):
n=2,4,6,8,10,...2j...

2. Se extrapolan los valores obtenidos a h=0

2. **Extrapolación por funciones racionales (Burlisch-Stoer) o polinómicas (peores pero más rápidas)**

1. Extrapolación da además estimación de error: uso de algoritmos incrementales de extrapolación (Neville)
2. Límite en valor máximo de n: si se llega a él, se reduce intervalo de integración (H=nh)

3. **Uso de métodos cuyo error depende de potencias de h²:**

1. Convergencia más rápida: extrapolación depende de h², y al subdividir más, se aumenta aproximación en 2 órdenes

4. **H ya no es 'pequeño' (10h, 100h)**
5. **Importancia de evaluación de Δ deseado por error fraccional; escalado de variables**

G. Métodos predictor-corrector

1. **Métodos multipaso con iteración funcional**
2. **Método explícito para estimar y_{i+1} (predictor):**
 $y_{i+1} = y_i + h(c_0^p f_i + c_{-1}^p f_{i-1} + c_{-2}^p f_{i-2} + \dots)$; $f_i = f(x_i, y_i)$, ...
3. **Ecuación implícita para valor final (corrector), que usa y_{i+1} anterior para evaluar f_{i+1} :**
 $y_{i+1} = y_i + h(c_0^c f_{i+1} + c_{-1}^c f_i + c_{-2}^c f_{i-1} + c_{-2}^c f_{i-2} + \dots)$; $f_i = f(x_i, y_i)$, ...
4. **Diferencia entre los y_{i+1} da estimación del error de truncamiento local**
5. **Se itera hasta reducir este error a los niveles deseados**
6. **Método Adams-Bashforth-Moulton de tercer orden ($O(h^4)$):**
 $c^p = \frac{23}{12}, \frac{-16}{12}, \frac{5}{12}$
 $c^c = \frac{5}{12}, \frac{8}{12}, \frac{-1}{12}$
7. **Si número de iteraciones fijas, se convierte en método explícito: no muy aconsejable**
8. **Método corrector multipaso con ecuación implícita resuelta por método de Newton es mejor para problemas stiff**

H. Métodos multivalor (multivalue)

1. **En lugar de calcular y_{i+1} , calculamos en cada paso y_{i+1} y sus derivadas:**

$$\bar{y}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ h y_i' \\ \frac{h^2}{2} y_i'' \\ \frac{h^3}{6} y_i''' \end{pmatrix} ; y_i' = f(x_i, y_i)$$

2. **Fórmula:**

$$\bar{y}_{i+1} = B \cdot \bar{y}_i + \alpha_{i+1} \bar{r}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{i+1} = h f(x_{i+1}, y_{i+1}) - (B \cdot \bar{y}_i)_2$$

$$r_2 = 1$$

1. B se obtiene al derivar:

$$y(x) = y_n + (x - x_n) y_n' + \frac{(x - x_n)^2}{2} y_n'' + \frac{(x - x_n)^3}{6} y_n'''$$

2. las condiciones sobre α_{i+1} y r_2 se obtienen al forzar

$$y_{i+1}' = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

3. **Resto componentes de r (r_1, r_3, r_4) son libres y determinan orden y estabilidad del método**
 1. Adams-Moulton (corrector) corresponde a 5/12, 3/4, 1/6
4. **Resolución de método implícito por predictor-corrector o Newton**
5. **Son equivalentes a métodos multipaso, pero resuelven dificultades de estos métodos:**
 1. Adaptación de paso de integración; incluso se puede cambiar de orden dinámicamente, cambiando r
 2. Arranque del método, empezando con orden 1

I. Comparación entre los métodos

1. **Runge-Kutta:**

1. Bueno para casi todo
2. Cuando no se exige mucha eficiencia ni exactitud

2. **Richardson:**

1. Para mejorar eficiencia y exactitud, aunque puede dar más problemas que RK
2. Falla cuando hay singularidades o si las soluciones son poco suaves

3. **Predictor-corrector:**

1. Richardson los está dejando obsoletos
2. Útiles para $f(x,y)$ complicada, pero con funciones suaves y se desea alta precisión

CONCLUSIONES

Este artículo presentó una vista general del desarrollo de las turbinas de viento, describe el estado actual y futuros retos para esta tecnología. Esta es una notable historia que comienza en el siglo diecinueve y entonces se acelera hasta las últimas dos décadas del siglo veinte con un curso muy similar a los primeros días de la aeronáutica. La historia esta lejos de terminar pero ciertamente comenzó y esta en evolución.

REFERENCES

- [2] 35th IEA Topical Expert Meeting “Long Term R&D Needs 2000 – 2020” The Netherlands, March 2001.
- [3] www.wind-energy-network.org