

2<sup>do</sup> Examen Parcial de Sistemas de Potencia 2-2007

**Problema #1** [2 Pts]. Las ecuaciones de oscilación de dos máquinas sincrónicas interconectadas son escritas como:

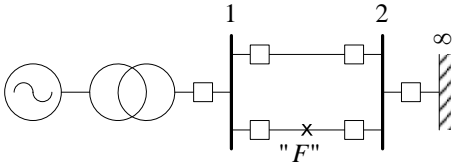
$$\frac{H_1}{\pi f} \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} = P_{mec1} - P_{elec1} \qquad \frac{H_2}{\pi f} \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} = P_{mec2} - P_{elec2}$$

Denote el ángulo de potencia relativo entre las dos máquinas por  $\delta = \delta_1 - \delta_2$ . Obtener la ecuación de oscilación equivalente de una sola máquina equivalente en términos de  $\delta$ . Determine las expresiones de  $H_{EQ}$ ,  $P_{mecEQ}$ ,  $P_{elecEQ}$ :

$$\frac{H_{EQ}}{\pi f} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{mecEQ} - P_{elecEQ}$$

Dejar las expresiones en términos de:  $P_{mec1}$ ,  $P_{mec2}$ ,  $P_{elec1}$  y  $P_{elec2}$ .

**Problema #2** [3 Pts]. Supóngase que se tiene un sistema de potencia como el de la Figura.



Partiendo de condiciones estables de operación ( $\delta_0$ ),

$P_{mec}^0 = P_{elec}^0$  ( $P_{elec}^{Antes} = P_{maxA} \text{sen} \delta$ ). Supóngase que una falla ocurre en el punto "F", de tal modo que la impedancia de transferencia entre las barras se incrementa ( $P_{elec}^{DURANTE} = P_{maxB} \text{sen} \delta$ ). Y finalmente la falla se despeja, sacando de operación la línea fallada ( $P_{elec}^{DESPUES} = P_{maxC} \text{sen} \delta$ ).

Demuestre aplicando el criterio de las áreas iguales, que el ángulo crítico de despeje de la falla viene dado por:

$$\cos \delta_c = \frac{P_{mec}(\delta_{max} - \delta_0) + P_{maxC} \cos \delta_{max} - P_{maxB} \cos \delta_0}{P_{maxC} - P_{maxB}}$$

**Problema #3** [4 Pts]. Un motor sincrónico de 10.000 HP, trifásico a 60 Hz, es alimentado desde una barra de potencia infinita a través de una impedancia  $X_{se} = 0.1$  p.u y resistencia despreciable. Inicialmente en condiciones estables este motor tiene una carga mecánica en el eje ( $P_{mec0}$ ) tal que la máquina consume  $S_T = 0.95 + 0.27j$  p.u cuando el voltaje en terminales de la máquina es 0.97 p.u. La carga mecánica es súbitamente es *disminuida* un valor  $\Delta P_{mec}$ . Empleando el criterio de las áreas iguales determine el valor del decremento de carga crítico, es decir, el valor de potencia mecánica que puede ser disminuido sin que la máquina pierda la estabilidad (Ojo: si es que existe tal valor ¿?)

**Problema 4.** Un generador hidro-eléctrico de 25 MVA, 60 Hz, entrega 20 MW sobre un sistema de transmisión de doble circuito a un gran sistema metropolitano que puede ser considerado como una barra de potencia infinita. La unidad de generación incluyendo la turbina hidráulica, posee una energía de 2.76 MJoule por MVA a velocidad nominal. La reactancia transitoria de eje directo del generador es  $x'_d = 0.30$  p.u. Los circuitos de transmisión poseen resistencia despreciable, y cada uno posee una reactancia de 0.20 p.u en las bases de 25 MVA. El voltaje detrás de la reactancia del generador es 1.03 p.u, y el voltaje en terminales del sistema metropolitano es 1.0 p.u. Un cortocircuito ocurre en la mitad de uno de los circuitos de transmisión, y el cual es despejado por la apertura simultanea de los dos interruptores extremos de la línea.

4.1. Determine la amplitud máxima de la potencia eléctrica transmitida entre el generador y el sistema metropolitano: (a) *antes de la falla*, (b) *durante la falla*, (c) *después de la falla*. [3 Pts].

4.2. Si la falla por cortocircuito trifásico sólido a tierra es sostenida determine si el sistema logra estabilidad y determine por medio del criterio de áreas iguales el ángulo de operación estable (Ojo: si es que este valor existe ¿?) [3 Pts]

4.3. Suponiendo que la falla es sostenida por un tiempo mayor al equivalente al ángulo del punto máximo de la potencia eléctrica transferida durante la falla. Determine aplicando el criterio de áreas iguales, el valor del ángulo crítico de despeje que garantiza la estabilidad del sistema (Ojo: si es que existe ¿?) [5 Pts].

**Problema #1** [2 Pts]. Las ecuaciones de oscilación de dos maquinas sincrónicas interconectadas son escritas como:

$$\frac{H_1}{\pi f} \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} = P_{mec1} - P_{elec1} \quad \frac{H_2}{\pi f} \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} = P_{mec2} - P_{elec2}$$

Denote el ángulo de potencia relativo entre las dos maquinas por  $\delta = \delta_1 - \delta_2$ . Obtener la ecuación de oscilación equivalente de una sola máquina equivalente en términos de  $\delta$ . Determine las expresiones de  $H_{EQ}$ ,  $P_{mecEQ}$ ,  $P_{elecEQ}$ :

$$\frac{H_{EQ}}{\pi f} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{mecEQ} - P_{elecEQ}$$

Dejar las expresiones en términos de:  $P_{mec1}$ ,  $P_{mec2}$ ,  $P_{elec1}$  y  $P_{elec2}$ .

## Resolución

Las ecuaciones de oscilación de las dos maquinas finitas son:

$$\frac{d^2 \delta_1}{dt^2} = \frac{\pi f (P_{mec1} - P_{elec1})}{H_1}$$

$$\frac{d^2 \delta_2}{dt^2} = \frac{\pi f (P_{mec2} - P_{elec2})}{H_2}$$

El ángulo relativo resulta:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2$$

Este ángulo será usado, debido a que es significativo para demostrar la inestabilidad entre las dos maquinas.

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} - \frac{d^2 \delta_2}{dt^2} \quad \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{\pi f (P_{mec1} - P_{elec1})}{H_1} - \frac{\pi f (P_{mec2} - P_{elec2})}{H_2}$$

Multiplicando cada lado de la expresión por:

$$\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}$$

Se tiene:

$$\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{H_2 \pi f (P_{mec1} - P_{elec1})}{H_1 + H_2} - \frac{H_1 \pi f (P_{mec2} - P_{elec2})}{H_1 + H_2}$$

$$\frac{H_1 H_2}{\pi f (H_1 + H_2)} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{H_2 (P_{mec1} - P_{elec1})}{H_1 + H_2} - \frac{H_1 (P_{mec2} - P_{elec2})}{H_1 + H_2}$$

$$\frac{H_1 H_2}{\pi f (H_1 + H_2)} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{H_2 P_{mec1} - H_1 P_{mec2}}{H_1 + H_2} - \frac{H_1 P_{elec2} - H_2 P_{elec1}}{H_1 + H_2}$$

Lo cual puede ser más simplemente escrito como:

$$\frac{H_{EQ}}{\pi f} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_{mecEQ} - P_{elecEQ}$$

Donde:

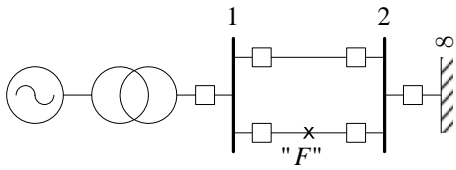
$$P_{mecEQ} = \frac{H_2 P_{mec1} - H_1 P_{mec2}}{H_1 + H_2}$$

$$P_{elecEQ} = \frac{H_1 P_{elec2} - H_2 P_{elec1}}{H_1 + H_2}$$

$$H_{EQ} = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}$$

La potencia equivalente mecánica y eléctrica, son medias ponderadas de las correspondiente a las dos maquinas reales. La constante de inercia equivalente es mas pequeña de la constante de inercia de las dos maquinas.

**Problema #2** [3 Pts]. Supóngase que se tiene un sistema de potencia como el de la Figura.



Partiendo de condiciones estables de operación ( $\delta_0$ ),  $P_{mec}^0 = P_{elec}^0$  ( $P_{elec}^{Antes} = P_{maxA} \text{sen} \delta$ ). Supóngase que una falla ocurre en el punto "F", de tal modo que la impedancia de transferencia entre las barras se incrementa ( $P_{elec}^{DURANTE} = P_{maxB} \text{sen} \delta$ ). Y finalmente la falla se despeja, sacando de operación la línea fallada ( $P_{elec}^{DESPUES} = P_{maxC} \text{sen} \delta$ ).

Demuestre aplicando el criterio de las áreas iguales, que el ángulo crítico de despeje de la falla viene dado por:

$$\cos \delta_c = \frac{P_{mec}(\delta_{max} - \delta_0) + P_{maxC} \cos \delta_{max} - P_{maxB} \cos \delta_0}{P_{maxC} - P_{maxB}}$$

## Resolución

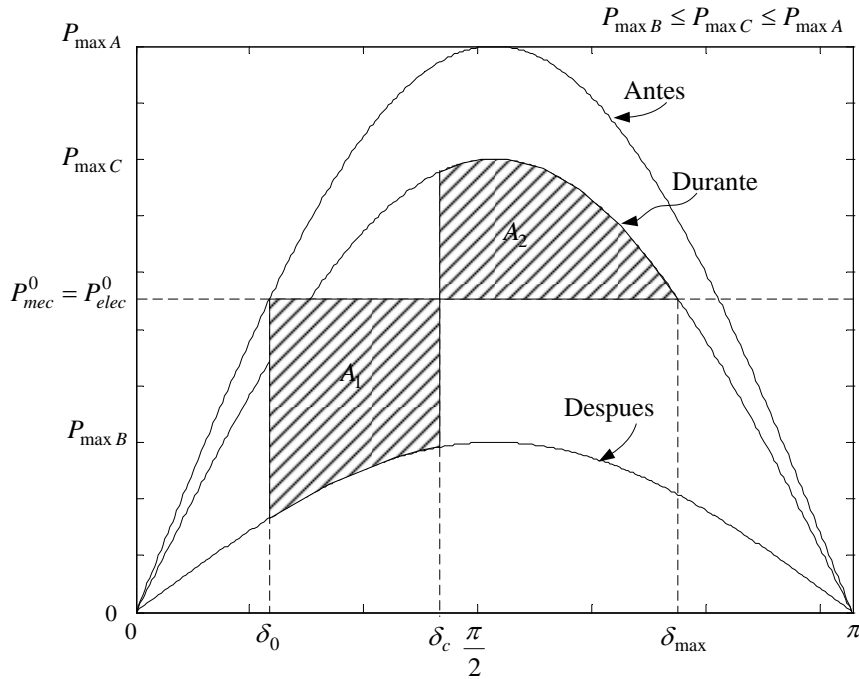
Se conoce que las ecuaciones de potencia eléctrica transmitida desde la maquina hasta la barra de potencia infinita queda dado por:

$$P_{elec}^{Antes} = P_{maxA} \text{sen} \delta ; \text{ Antes de la perturbación}$$

$$P_{elec}^{DURANTE} = P_{maxB} \text{sen} \delta ; \text{ Durante la perturbación}$$

$$P_{elec}^{DESPUES} = P_{maxC} \text{sen} \delta ; \text{ Después de la perturbación}$$

En tal sentido el diagrama de potencia ángulo, de la situación planteada quedará dada por:



Se procede a plantear las respectivas áreas:

$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_c} (P_{mec}^0 - P_{maxB} \text{sen} \delta) d\delta$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{\delta_{max}} (P_{maxC} \text{sen} \delta - P_{mec}^0) d\delta$$

$$A_1 = A_2$$

Se resuelve las ecuaciones y se logra:

$$A_1 = P_{mec}^0 \delta \Big|_{\delta_0}^{\delta_c} + P_{maxB} \cos \delta \Big|_{\delta_0}^{\delta_c}$$

$$A_1 = P_{mec}^0 (\delta_c - \delta_0) + P_{maxB} [\cos \delta_c - \cos \delta_0]$$

$$A_2 = -P_{\max C} \cos \delta \Big|_{\delta_c}^{\delta_{\max}} - P_{mec}^0 \delta \Big|_{\delta_c}^{\delta_{\max}}$$

$$A_2 = -P_{\max C} [\cos \delta_{\max} - \cos \delta_c] - P_{mec}^0 (\delta_{\max} - \delta_c)$$

Igualando para que se cumpla  $A_1 = A_2$  :

$$P_{mec}^0 (\delta_c - \delta_0) + P_{\max B} [\cos \delta_c - \cos \delta_0] = -P_{\max C} [\cos \delta_{\max} - \cos \delta_c] - P_{mec}^0 (\delta_{\max} - \delta_c)$$

Se expande los productos;

$$P_{mec}^0 \delta_c - P_{mec}^0 \delta_0 + P_{\max B} \cos \delta_c - P_{\max B} \cos \delta_0 = -P_{\max C} \cos \delta_{\max} + P_{\max C} \cos \delta_c - P_{mec}^0 \delta_{\max} + P_{mec}^0 \delta_c$$

Se eliminan términos semejantes:

$$-P_{mec}^0 \delta_0 + P_{\max B} \cos \delta_c - P_{\max B} \cos \delta_0 = -P_{\max C} \cos \delta_{\max} + P_{\max C} \cos \delta_c - P_{mec}^0 \delta_{\max}$$

Se agrupan términos en ambos lados:

$$P_{mec}^0 (\delta_{\max} - \delta_0) + P_{\max C} \cos \delta_{\max} - P_{\max B} \cos \delta_0 = (P_{\max C} - P_{\max B}) \cos \delta_{\max}$$

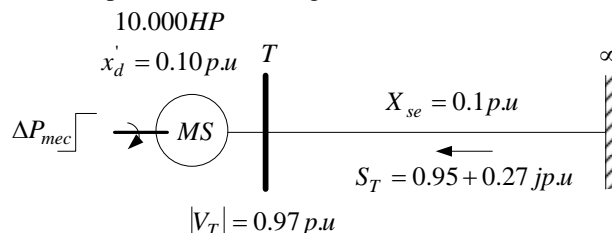
Despejando finalmente se tiene:

$$\cos \delta_c = \frac{P_{mec}^0 (\delta_{\max} - \delta_0) + P_{\max C} \cos \delta_{\max} - P_{\max B} \cos \delta_0}{P_{\max C} - P_{\max B}}$$

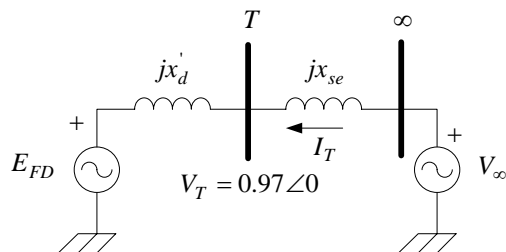
**Problema #3** [4 Pts]. Un motor sincrónico de 10.000 HP, trifásico a 60 Hz, es alimentado desde una barra de potencia infinita a través de una impedancia  $X_{se} = 0.1$  p.u y resistencia despreciable. Inicialmente en condiciones estables este motor tiene una carga mecánica en el eje ( $P_{mec}$ ) tal que la máquina consume  $S_T = 0.95 + 0.27j$  p.u cuando el voltaje en terminales de la máquina es 0.97 p.u. La carga mecánica es súbitamente es *disminuida* un valor  $\Delta P_{mec}$ . Empleando el criterio de las áreas iguales determine el valor del decremento de carga crítico, es decir, el valor de potencia mecánica que puede ser disminuido sin que la maquina pierda la estabilidad (Ojo: si es que existe tal valor  $\zeta$ ?)

## Resolución

Se tiene que inicialmente el sistema se comporta como en la figura:



En condiciones estable originales se cumple:



Suponiendo el voltaje en terminales de la maquina a referencia se tiene:

$$I_T = \left( \frac{S_T}{V_T} \right)^* \quad I_T = \left( \frac{S_T}{V_T} \right)^* \quad I_T = \left( \frac{0.95 + 0.27j}{0.97 \angle 0} \right)^* \quad I_T = 1.0182 \angle -15.8657 \text{ p.u}$$

El voltaje interno de la maquina resulta ser:

$$E_{FD} = -jx'_d I_T + V_T \quad E_{FD} = 0.9472 \angle -5.93459$$

Y el voltaje de la barra de potencia infinita resulta:

$$V_\infty = jx_{se} I_T + V_T \quad V_\infty = 1.006 \angle 5.6047$$

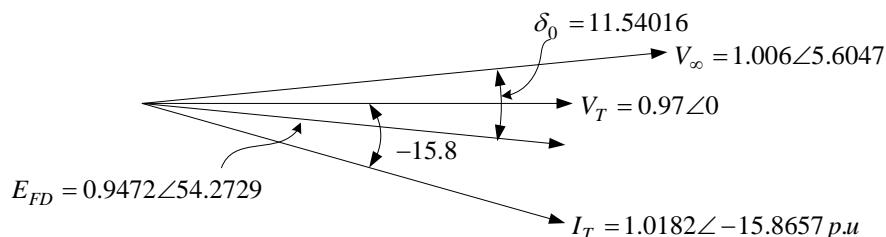
De tal modo que la ecuación de potencia eléctrica transmitida desde la barra de potencia infinita a la maquina sincrónica resulta:

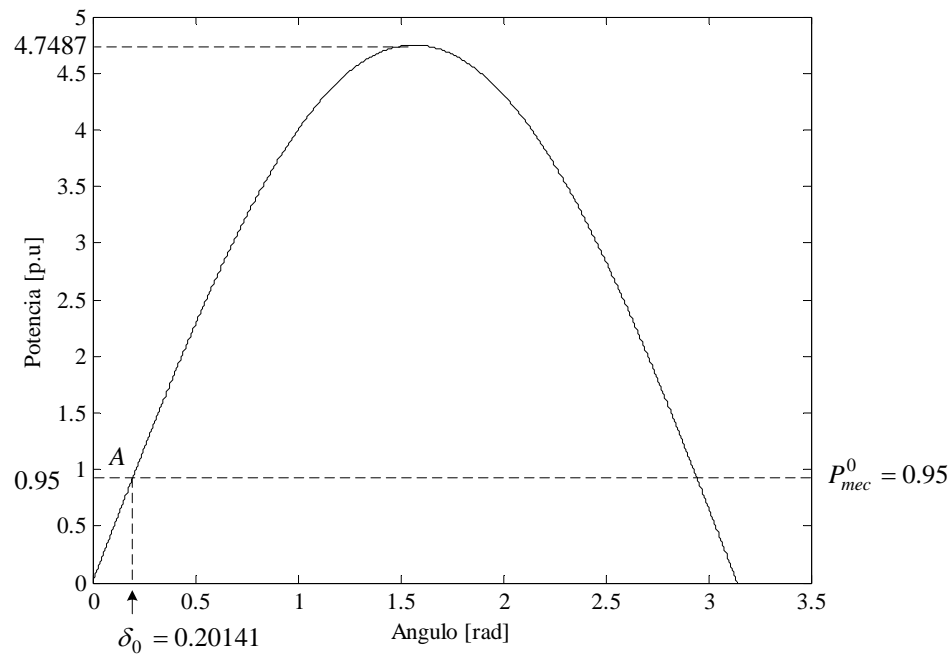
$$P_{elec} = \frac{|E_{FD}| |V_\infty|}{X_{MS\infty}} \text{sen} \delta \quad P_{elec} = \frac{|0.9472| |1.006|}{0.2} \text{sen} \delta \quad P_{elec} = 4.7487 \text{sen} \delta$$

De aquí se conoce que el punto inicial de operación estable es  $P_{elec}^0 = 0.95 = 4.7487 \text{sen} \delta_0$ ,  $\delta_0 = \text{sen}^{-1} \left( \frac{0.95}{4.7487} \right)$

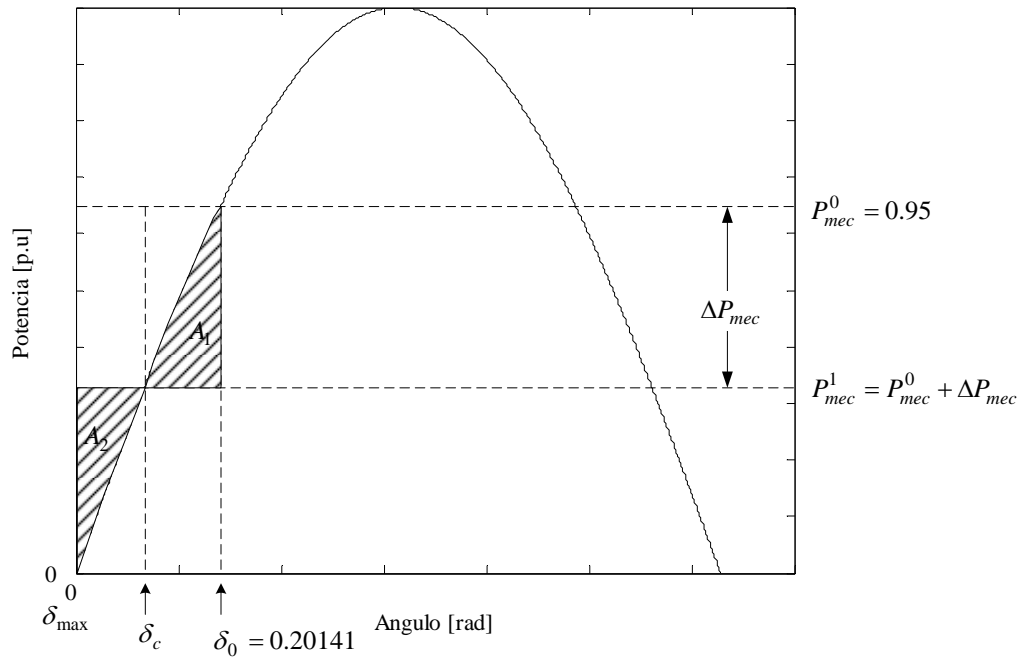
$$\delta_0 = 11.54016 \quad \delta_0 = 0.20141 \text{ rad}$$

El diagrama fasorial de la condición estable previo a la perturbación resulta:





El punto A, describe el punto inicial de operación estable de la máquina.



Se procede a aplicar el criterio de las áreas iguales.

$$A_1 = \int_{\delta_c}^{\delta_0} (P_{\max} \text{sen} \delta - P_{mec}^1) d\delta \qquad A_2 = \int_{\delta_{\max}}^{\delta_c} (P_{mec}^1 - P_{\max} \text{sen} \delta) d\delta$$

$$A_1 = A_2$$

De tal modo que resulta:

$$A_1 = \int_{\delta_c}^{0.20141 \text{ rad}} (4.7487 \text{ sen } \delta - P_{mec}^1) d\delta \quad A_2 = \int_0^{\delta_c} (P_{mec}^1 - 4.7487 \text{ sen } \delta) d\delta$$

$$A_1 = A_2$$

Pero se debe recordar que  $\delta_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{P_{mec}^1}{4.7487}\right)$

$$A_1 = -4.7487 \cos(0.20141) - 0.20141 P_{mec}^1 + 4.7487 \cos \delta_c + P_{mec}^1 \delta_c$$

$$A_2 = 4.7487 \cos(\delta_c) - 4.7487 + P_{mec}^1 \delta_c$$

Para que se cumpla el criterio de áreas iguales y exista estabilidad debe cumplirse:

Igualando se tiene:

$$A_1 = A_2$$

Sustituyendo se tiene:

$$4.6527 - 0.20141 P_{mec}^1 + 4.7487 = 0$$

Despejando resulta:

$$P_{mec}^1 = 0.4466 p.u$$

De tal modo que el cambio de potencia mecánica que se puede hacer sin que la máquina pierda estabilidad resulta:

$$\Delta P_{mec} = 0.5034 p.u$$

**Problema 4.** Un generador hidro-eléctrico de 25 MVA, 60 Hz, entrega 20 MW sobre un sistema de transmisión de doble circuito a un gran sistema metropolitano que puede ser considerado como una barra de potencia infinita. La unidad de generación incluyendo la turbina hidráulica, posee una energía de 2.76 MJoule por MVA a velocidad nominal. La reactancia transitoria de eje directo del generador es  $x'_d = 0.30$  p.u. Los circuitos de transmisión poseen resistencia despreciable, y cada uno posee una reactancia de 0.20 p.u en las bases de 25 MVA. El voltaje detrás de la reactancia del generador es 1.03 p.u, y el voltaje en terminales del sistema metropolitano es 1.0 p.u. Un cortocircuito ocurre en la mitad de uno de los circuitos de transmisión, y el cual es despejado por la apertura simultanea de los dos interruptores extremos de la línea.

## Resolución

4.1. Determine la amplitud máxima de la potencia eléctrica transmitida entre el generador y el sistema metropolitano: (a) *antes de la falla*, (b) *durante la falla*, (c) *después de la falla*. [3 Pts].

En la Figura siguiente se muestra el diagrama de reactancias de la red. Antes de que ocurra la falla, la reactancia entre los puntos A y B puede ser encontrada por la combinación serie paralelo:

$$X_1 = 0.30 + \frac{0.20}{2} = 0.40 \text{ p.u}$$

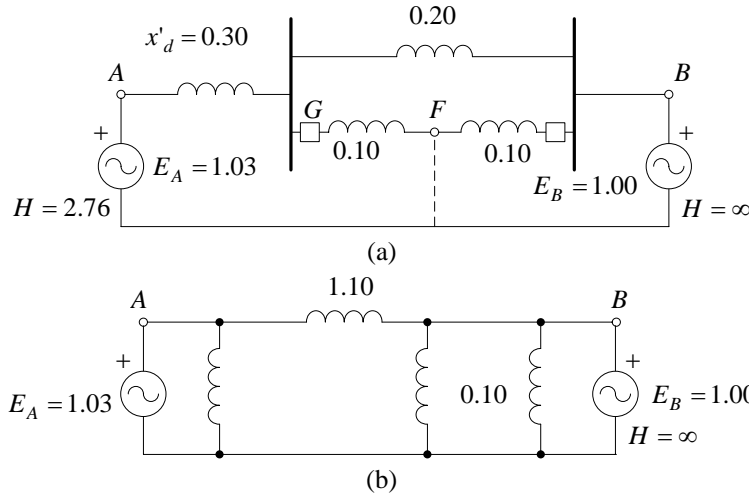
Cuando la falla es despejada uno de los circuitos en paralelo es despejado haciendo la reactancia:

$$X_3 = 0.30 + 0.20 = 0.50 \text{ p.u}$$

La reactancia equivalente entre el generador y la barra de potencia infinita mientras la falla se encuentra instalada, puede ser fácilmente determinada, efectuando una conversión del circuito Y, GABF a delta, eliminando la unión G. El circuito resultante es mostrado en la Figura (b). La reactancia de la rama de la delta entra A y B es:

$$X_2 = 0.30 + 0.20 + \frac{0.30 \times 0.20}{0.10} \quad X_2 = 0.50 + 0.60 = 1.10 \text{ p.u}$$

Los valores de reactancia de las otras dos ramas no son calculados debido a que ellas esta conectadas directamente a las fuentes de voltaje constantes, lo cual no afecta el flujo de potencia entre las barras.



La ecuación de potencia ángulo para cada uno de los estados viene dado por:

$$P_{elec} = \frac{E_A E_B}{X} \text{sen} \delta = C \text{sen} \delta$$

Donde C posee los siguientes valores:

$$\text{Antes de la falla: } C_1 = \frac{E_A E_B}{X_1} = \frac{1.03 \times 1.00}{0.40} = 2.58$$

$$\text{Durante la falla: } C_2 = \frac{E_A E_B}{X_2} = \frac{1.03 \times 1.00}{1.10} = 0.936$$

$$\text{Después de la falla: } C_3 = \frac{E_A E_B}{X_3} = \frac{1.03 \times 1.00}{0.50} = 2.06$$

$$P_{elec}^{Antes} = 2.58 \text{sen} \delta$$

$$P_{elec}^{Durante} = 0.936 \text{sen} \delta$$

$$P_{elec}^{Despues} = 2.06 \text{sen} \delta$$

4.2. Si la falla por cortocircuito trifásico sólido a tierra es sostenida determine si el sistema logra estabilidad y determine por medio del criterio de áreas iguales el ángulo de operación estable (Ojo: si es que este valor existe ¿?) [3 Pts]

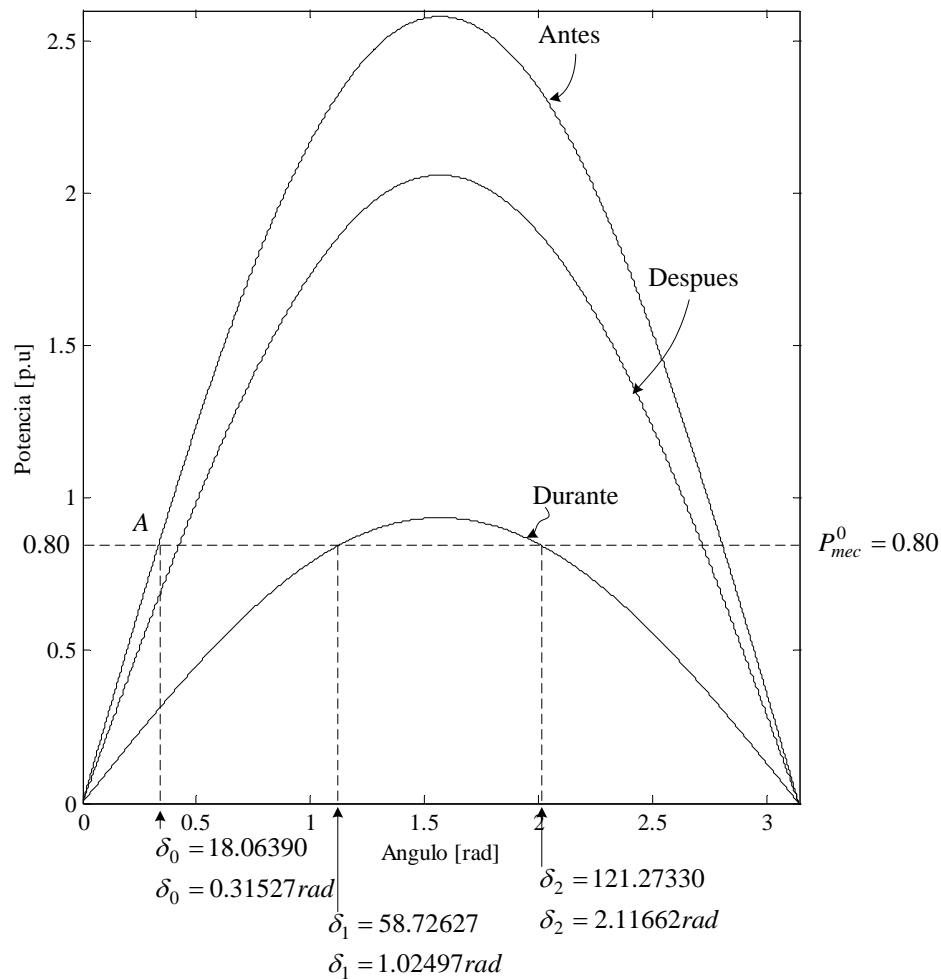
Antes de la perturbación la maquina entrega a la barra de potencia infinita: 0.80 p.u

$$P_{elec}^{Antes} = P_{mec}^0 = 2.58 \text{sen} \delta_0 = 0.80 \text{ p.u}$$

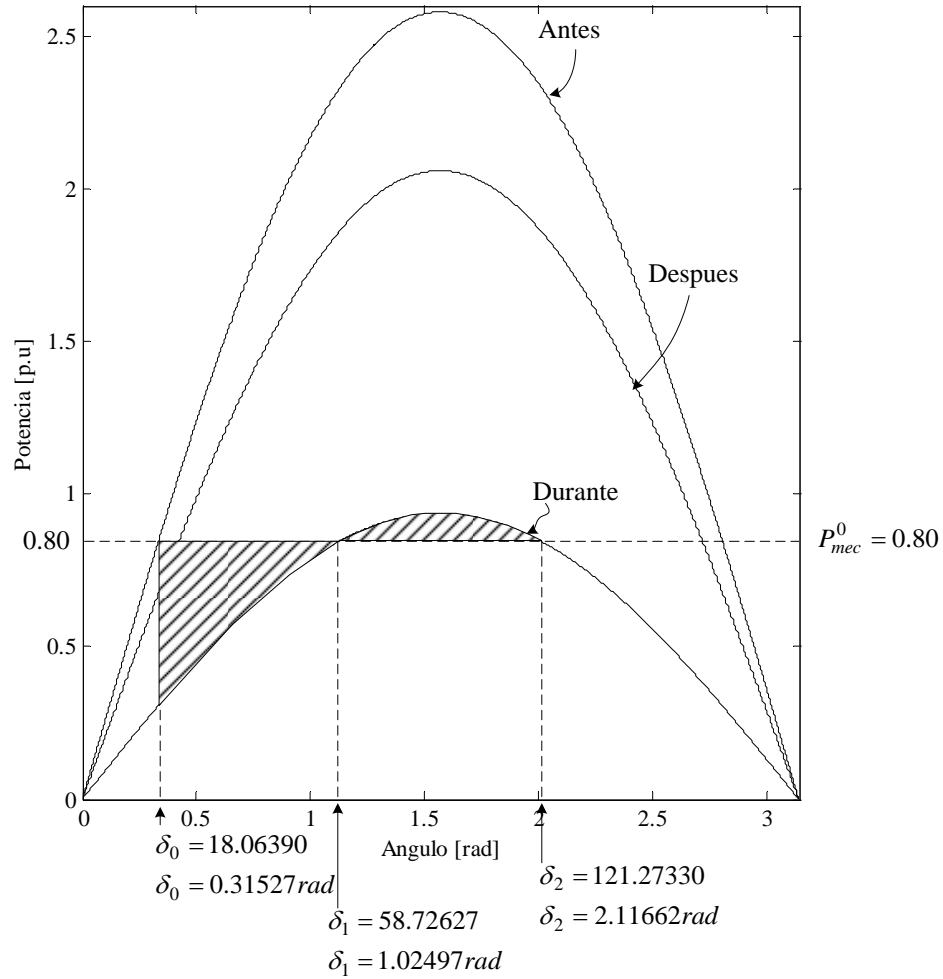
$$\delta_0 = 18.06390$$

$$\delta_0 = 0.31527 \text{ rad}$$

Para la perturbación planteada se presentan las curvas de potencia ángulo:



En el peor de los casos se puede ver que las áreas correspondientes a aceleración y desaceleración, nunca podrán igualarse:



$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_{mec}^0 - P_{max} \sin \delta) d\delta \qquad A_2 = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_{max} \sin \delta - P_{mec}^0) d\delta$$

$$A_1 = A_2$$

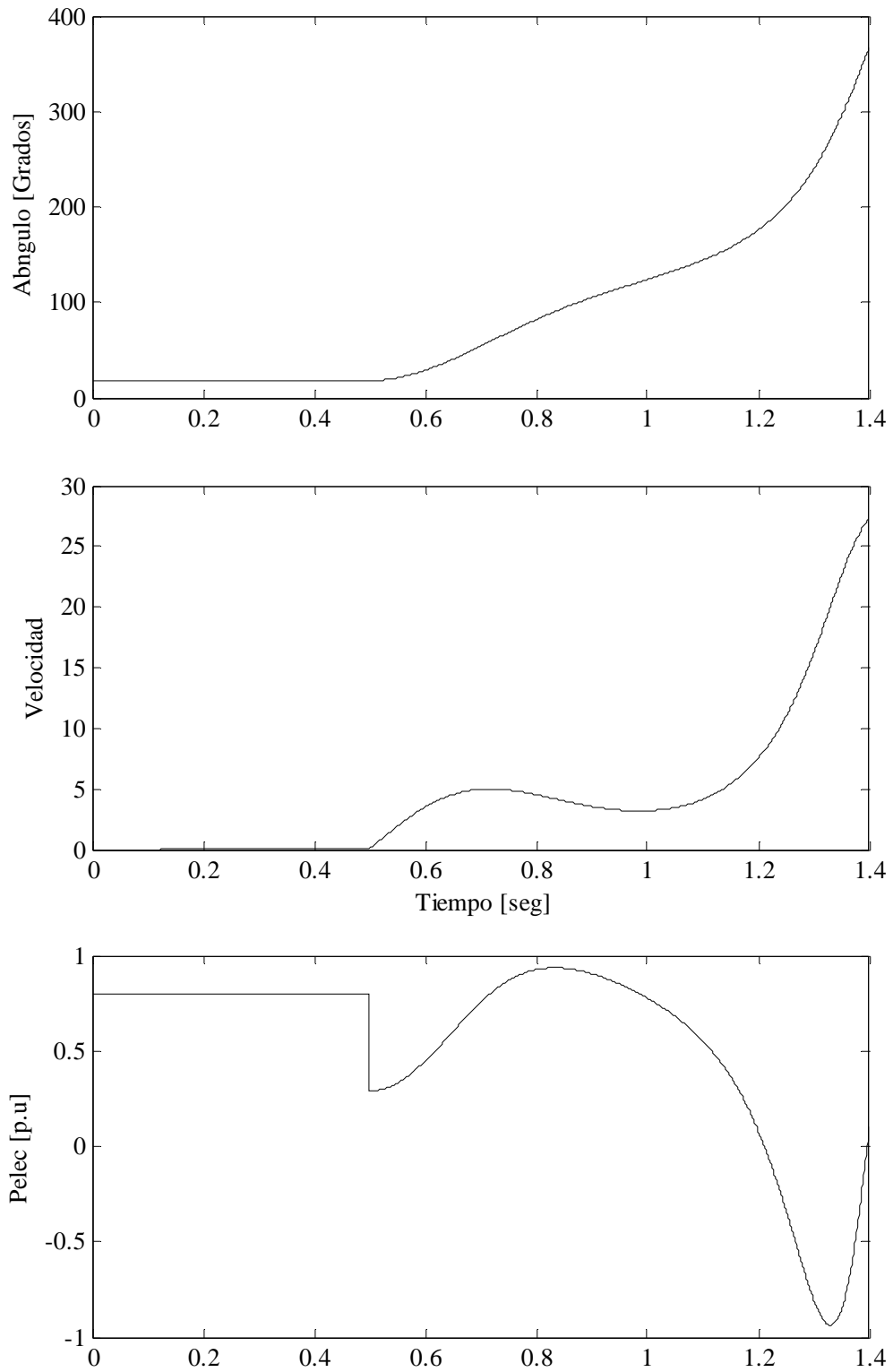
De tal modo que resulta:

$$A_1 = \int_{0.31527}^{1.02497} (0.8 - 0.936 \sin \delta) d\delta \qquad A_2 = \int_{1.02497}^{2.11662} (0.936 \sin \delta - 0.8) d\delta$$

$$A_1 = 0.1638 \qquad A_2 = 0.0985$$

$$A_1 > A_2$$

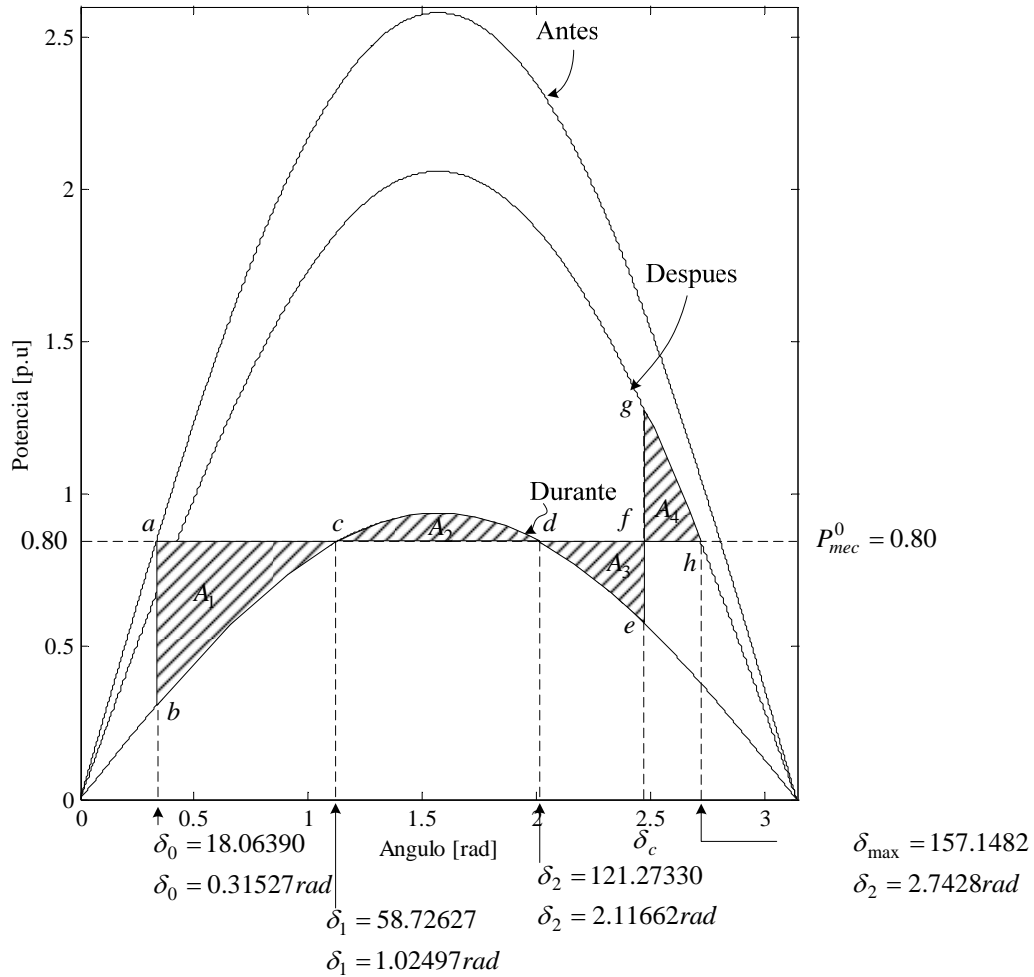
No hay suficiente área de frenado disponible, para que la máquina recupere el sincronismo.



De estas curvas se ve fácilmente que la maquina no recupera la estabilidad.

4.3. Suponiendo que la falla es sostenida por un tiempo mayor al equivalente al ángulo del punto máximo de la potencia eléctrica transferida durante la falla. Determine aplicando el criterio de áreas iguales, el valor del ángulo crítico de despeje que garantiza la estabilidad del sistema (Ojo: si es que existe ¿?) [5 Pts].

Se procede a plantear las áreas correspondientes a la perturbación.



Las áreas A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>, ya están fijas, y de hecho, lo que se trata es de determinar el ángulo tal que se cumpla:

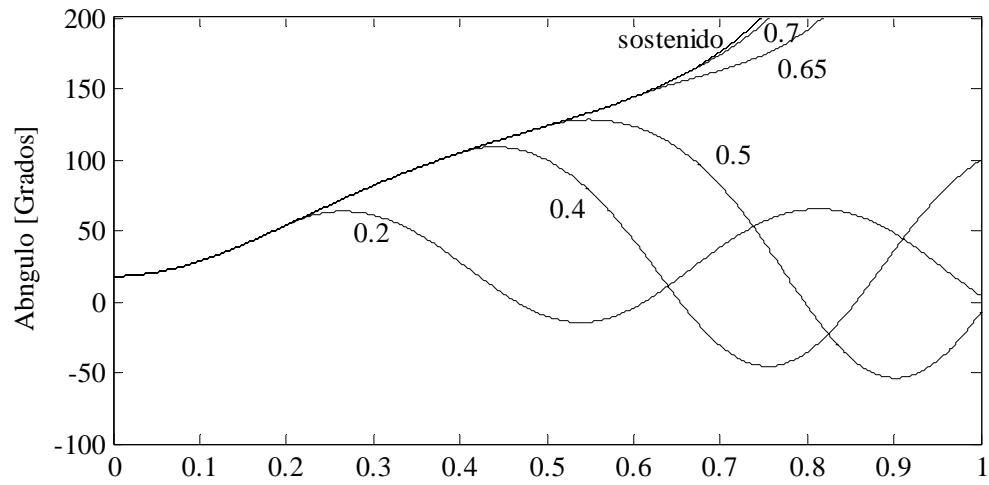
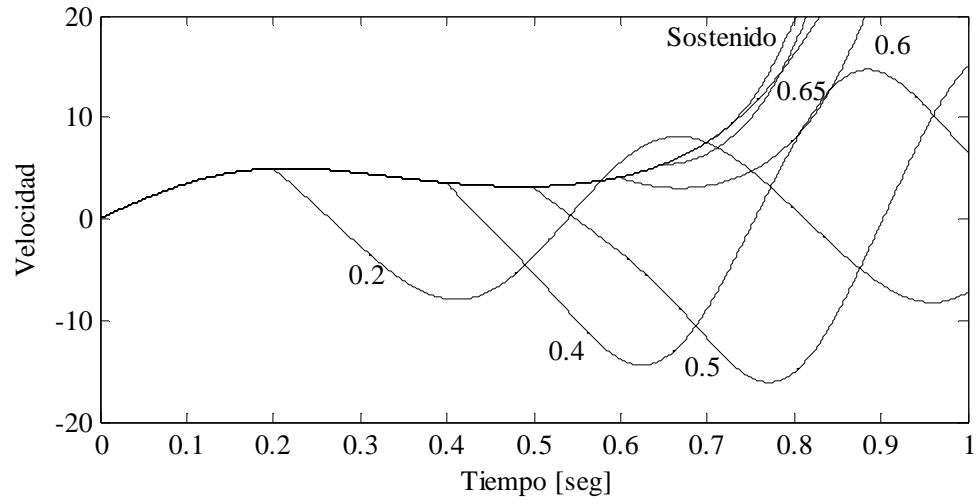
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$$\int_{0.31527rad}^{1.02497rad} (0.8 - 0.936sen\delta)d\delta + \int_{1.02497}^{2.11662} (0.936sen\delta - 0.8)d\delta + \int_{2.11662}^{\delta_c} (0.8 - 0.936sen\delta)d\delta + \int_{\delta_c}^{2.7428} (2.06sen\delta - 0.8)d\delta = 0$$

$$0.1638 - 0.0938 - \int_{2.11662}^{\delta_c} (0.8 - 0.936sen\delta)d\delta + \int_{\delta_c}^{2.7428} (2.06sen\delta - 0.8)d\delta = 0$$

Resolviendo resulta:

$$\delta_c = 138$$



Se puede observar que el limite de estabilidad en tiempo, resulta ser  $t = 0.61$  segundos, ya que para valores superiores la maquina pierde el sincronismo.