

Métodos Numéricos para la Solución Ecuaciones Diferenciales: Un Ejemplo Comparativo

Francisco M. González-Longatt

Resumen— La resolución de la dinámica de sistemas del cualquier tipo involucra la integración de ecuaciones diferenciales. En muchos casos los problemas no-lineales no son tratables analíticamente siendo la única alternativa posible los métodos numéricos. En este artículo se enfrenta el problema de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, mostrando una breve revisión de los métodos, para luego efectuar simulaciones en Matlab™ de un ejemplo que permite a partir de sus resultados comparar tres métodos numéricos: Euler, Runge-Kutta 2do orden, y Runge-Kutta 4to orden; ante diferentes pasos de integración. Se escogió como problema tipo, la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden $y'(x)=y$, $y(0)=1$. Los resultados son consecuentes con la teoría, mostrando la conveniencia para resultados de menor error el Método de Runge-Kutta de 4^{to} orden.

Índice de Términos— Ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos numéricos para la resolución, Euler, Runge-Kutta.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos han cobrado fuerza en los últimos años por varias razones. Probablemente la más importante, es que puede accederse a computadoras altamente eficientes a un costo cada vez más bajo, lo que permite su uso para la resolución de problemas altamente complejos. Una segunda razón es que los métodos numéricos son en muchos casos la única alternativa posible para la resolución de los frecuentes problemas no-lineales muchas veces intratables analíticamente. Por otra parte los problemas lineales continúan creciendo en magnitud, requiriendo un mayor esfuerzo para su solución [1].

El tipo más simple de ecuación diferencial ordinaria es la lineal de primer orden, el *Problema de Cauchy* de la forma:

$$\mathcal{P} \equiv \begin{cases} y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = F(t, y) \\ y(t = t_0) = y_0 \end{cases}$$

Manuscrito terminado el 23 de Febrero de 2005 y revisado y mejorado el 16 de Marzo de 2006.

F. G. L. Está con la Universidad Experimental Politécnica de la Fuerza Armada, Carretera Nacional Maracay-Mariara, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Maracay, Estado Aragua, Venezuela, Tlf. +58-243-5546951, Fax: +58-243-5546921, E-mail: fglongatt@ieee.org.

Es candidato a Doctor en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, Los Chaguaramos, Caracas, Venezuela, Tlf. +58-414-4572832, E-mail: flongatt@elecisc.ing.ucv.ve.

Se supone que la solución del problema de la ecuación diferencial ordinaria, a condiciones iniciales, es *única, continua y diferenciable* en una región finita:

$$a \leq t \leq b \quad (2)$$

De igual forma, la función $F(t,y)$ es *definida y continua* en este mismo intervalo ($t \in [a,b]$), y que cumple con el *Teorema de Lipschitz*. Para resolver este problema, hay varios métodos numéricos aplicables.

- Método de Euler hacia Adelante.
- Método de Euler Modificado.
- Método de Heun.
- Métodos de Runge Kutta.

El propósito de este artículo es presentar una breve introducción a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de técnicas numéricas. El tratamiento dado aquí es simple y es un intento para introducir al análisis numérico a las personas no expertas. Una forma rápida y simple de hacerlo es entrar directamente en ejemplos que pueden ser resueltos sin entrar en complejos detalles. En tal sentido en este artículo se presentan los resultados de algunas soluciones a ecuaciones diferenciales por técnicas numéricas.

II. BREVE REVISIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Están bien documentados los métodos para resolver el problema de ecuaciones diferenciales a condiciones iniciales por integración numérica.

TABLA I. ALGUNOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Método	Orden del error	Comentarios
Integración directa, regla trapezoidal, regla de Simpson	$O(\Delta t)$	Se debe conocer las n-1 derivadas para resolver la ecuación.
Euler	$O(\Delta t^2)$	Auto-arranque
Euler Modificado (Heun)	$O(\Delta t^3)$	Auto-arranque predictor corrector
Runge-Kutta	$O(\Delta t^3)$	Auto-arranque, lento
Milne	$O(\Delta t^5)$	Arranca por Runge-Kutta o serie de Taylor
Hamming	...	Impone la máxima condición de Δt para solución estable
Crane	...	Varia el tamaño de Δt^3 para controlar el error

Todos los métodos se dividen el dominio del tiempo en pequeños segmentos $h = \Delta t$ y aproximan la solución de la función para el extremo de cada segmento. Al hacer esto hay tres problemas: la obtención del comienzo de integración, la velocidad de calculo, y los errores generador. Algunos métodos son de auto-arranque y otros no lo son; de tal modo, un esquema de calculo puede comenzar con un método de

integración y luego cambia otro método para incrementar la velocidad y precisión. La velocidad es importante, debido a que aunque las computadoras digitales pueden ser muy rápidas, algunos procesos puede probará un gran esfuerzo de cálculo que puede ser costoso. Un pequeño resumen de los bien conocidos métodos de integración numérica es dado en la siguiente tabla.

A manera de resumen se presentan las ecuaciones aproximantes a ser empleadas por cada uno de los métodos más comúnmente empleados.

A. Método de Euler Hacia delante (Forward)

También es conocido como el Método de Taylor de Orden 1 con un error de orden $O(h^2)$:

$$Y_{i+1} = Y_i + hF_i \quad (1)$$

La interpretación geométrica es la aproximación de la solución por la recta tangente. La solución calculada es polilínea con lados igual a rectas con pendiente F_i en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Este método presenta problemas de estabilidad y de exactitud (convergencia).

B. Método de Runge-Kutta

El objetivo de los métodos de Runge-Kutta es evitar el cálculo de derivadas de $f(x,y)$, a base de calcular $F(t,y)$ en más puntos, manteniendo el orden del error y la complejidad de cálculo. Los métodos de orden 2, 3 y 4 requieren el cálculo de $F(t,y)$ en 2, 3 y 4 puntos respectivamente. Los métodos de orden $m > 4$ requieren el cálculo de $F(t,y)$ en más de m puntos (no más de $m+2$). Se emplea una función de incremento $\phi(t, Y_i, h)$, para la aproximación de $F(t,y)$ en intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

$$Y_{i+1} = Y_i + h\phi(t_i, Y_i, h) \quad (2)$$

1) Runge-Kutta de 2^{do} Orden, $O(h^3)$

En este caso la función aproximante es de la forma:

$$\begin{aligned} \phi &= ak_1 + bk_2 \\ k_1 &= F(t_i, Y_i) \\ k_2 &= F(t_i + ph, Y_i + qhF(t_i, Y_i)) \\ Y_{i+1} &= Y_i + h(ak_1 + bk_2) \end{aligned} \quad (3)$$

En el caso del denominado, método de Runge-Kutta de 2do Orden-Promedio, se emplea el promedio de las tangentes, siendo $a = b = 1/2$.

$$\bar{Y}_{i+1} = Y_i + hF(t_i, Y_i) \quad (4)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2} [F(t_i, Y_i) + F(t_i + h, \bar{Y}_i)]$$

Cuando se emplea la tangente en el punto medio, es reconocido como el método de Runge-Kutta de punto medio, siendo $a = 0, b = 1$.

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{i+\frac{1}{2}} &= Y_i + \frac{h}{2} F(t_i, Y_i) \\ Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{2} F\left(t_i + \frac{h}{2}, \bar{Y}_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

2) Runge-Kutta de 3^{er} Orden, $O(h^4)$

En este caso se emplea el promedio de la tangente en el punto medio y en los extremos.

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= F(t_i, Y_i) \\ k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$k_3 = F(t_i + h, Y_i + 2hk_2 - hk_1)$$

3) Runge-Kutta de 4^{to} Orden, $O(h^5)$

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= F(t_i, Y_i) \\ k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= F(t_i + h, Y_i + hk_3) \end{aligned} \quad (7)$$

III. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

Para introducir de forma directa al uso de los métodos numéricos en la resolución de ecuaciones diferenciales, considere la siguiente ecuación.

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

A. Método de Euler

Inicialmente se resuelve aplicando el método de Euler hacia delante, para un $h = 0.2, n = 5$, se tiene:

TABLA II.
SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE EULER CON $H = 0.2, N = 5$.

i	ti	Y_i
1	0.2	1.2
2	0.4	1.44
3	0.6	1.728
4	0.8	2.0736
5	1.0	2.48832

Si se compara con la solución exacta se tiene que el error absoluto es $e^1 - Y(1) = 0.23, \varepsilon_{abs} = 0.23$. Ahor si se considera un paso de integración más pequeño, $h = 0.02$, el error se reduce $\varepsilon_{abs} = 0.0267$.

TABLA III.
SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE EULER CON $H = 0.02, N = 50$.

i	ti	Y_i
1	0.2	1.02
2	0.4	1.48595
3	0.6	1.81136
4	0.8	2.20804
5	1.0	2.69159

El error resulta ser: $\varepsilon_{abs} = 0.0267$. El trazado del error absoluto para un número superior de sub-intervalos se muestra en la Figura 1.

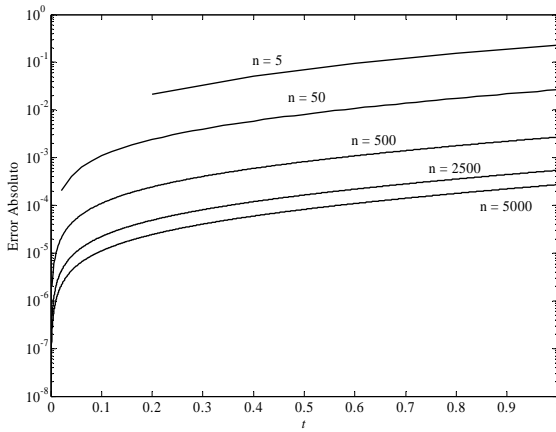


Figura 1. Comparación del error absoluto con el método de Euler, medido a la solución analítica, para $n = \{5, 50, 500, 2500, 5000\}$

B. Método de Runge-Kutta de 2^{DO} Orden

Empleando Runge-Kutta de segundo orden, para varios números de sub-intervalos, los resultados se muestran en la Tabla IV.

TABLA IV.
SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2^{DO} ORDEN PARA VARIOS VALORES DE N

i	t_i	$Y_i (n=5)$	$Y_i (n=50)$	$Y_i (n=500)$
1	0.2	1.2	1.22139	1.2214
2	0.4	1.4884	1.49179	1.49182
3	0.6	1.8150	1.82205	1.82212
4	0.8	2.215	2.22542	2.22554
5	1.0	2.7027	2.7181	2.71828

El error absoluto resulta ser: $\varepsilon_{abs} = 0.0156$, para el caso particular de $n = 5$, lo cual es muy inferior al obtenido para el mismo paso de integración con el Método de Euler hacia delante. En la Figura 2, se muestra la grafica del error absoluto medido desde la solución analítica para un número de sub-intervalos mayor.

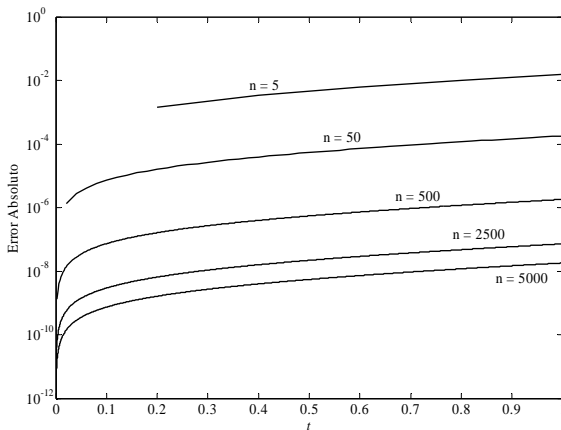


Figura 2. Comparación del error absoluto con el método de Runge-Kutta de 2^{do} orden, medido a la solución analítica, para $n = \{5, 50, 500, 2500, 5000\}$

C. Método de Runge-Kutta de 4^{TO} Orden

Se procede a la solución por el método de Runge-Kutta de 4to orden, con varios pasos de integración, los resultados se

muestran en la Tabla V, y en la Figura 3 se ha graficado el error absoluto, medido desde la solución exacta.

TABLA V.
SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2^{DO} ORDEN PARA VARIOS VALORES DE N

i	t_i	$Y_i (n=5)$	$Y_i (n=50)$	$Y_i (n=500)$
1	0.2	1.2214	1.2214	1.2214
2	0.4	1.4918	1.49182	1.49182
3	0.6	1.8221	1.82212	1.82212
4	0.8	2.2255	2.22554	2.22554
5	1.0	2.7183	2.71828	2.71828

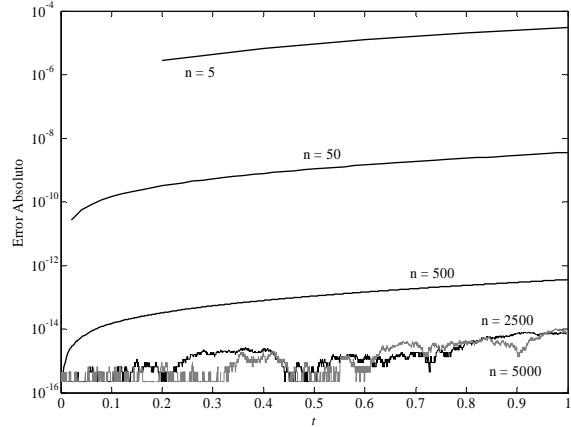


Figura 3. Comparación del error absoluto con el método de Runge-Kutta de 4^{to}, medido a la solución analítica, para $n = \{5, 50, 500, 2500, 5000\}$

El error absoluto para $n = 5$ resulta $\varepsilon_{abs} = 1.8175 \times 10^{-5}$, el cual es el menor error comparado con los métodos de Euler y Runge-Kutta de menor orden.

D. Comparación entre Métodos

Al efectuar el trazado del error absoluto en la solución de la ecuación diferencial (8) para un mismo paso de integración ($n=10$), para los diferentes métodos de integración: Euler, Runge-Kutta de 2^{do} y 4^{to} orden, se evidencia, que los métodos que presentan mayor error son: Euler, Runge Kutta de 2^{do} y de 4^{to} orden en ese mismo orden de mayor a menor.

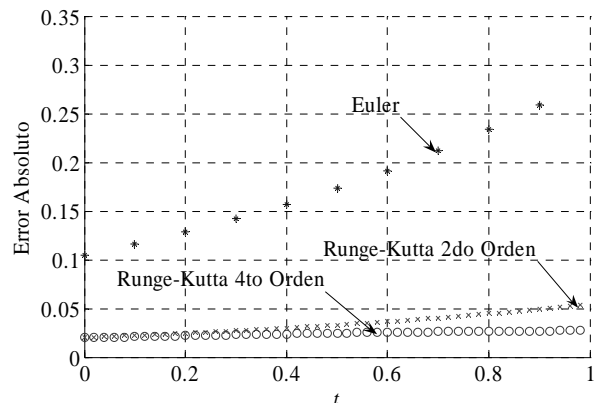


Figura 4. Comparación del Error Absoluto, para varios métodos para $n = 10$. Y eso es consistente con la teoría que afirma que el error de Euler es $O(h)$, mientras que para Runge Kutta de 2^{do} y 4^{to} orden son $O(h^3)$ y $O(h^5)$, respectivamente.

TABLA VI

RESULTADOS CON LOS DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS

i	x_i	$Y(x_i)$	$Y(x_i)$	$Y(x_i)$
		<i>Euler</i>	<i>Runge-Kutta 2^{do} Orden</i>	<i>Runge-Kutta 4^{do} Orden</i>
0	0	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.2	1.2000	1.2200	1.2214
2	0.4	1.4400	1.4884	1.4918
3	0.6	1.7280	1.8158	1.8221
4	0.8	2.03736	2.2153	2.2255
5	1	2.4883	2.7027	2.7183

IV. CONCLUSIONES

En este artículo ha enfrentado el problema de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en forma simple y directa, el tratamiento dado aquí es simple y es un intento para introducir al análisis numérico a las personas no expertas. En este caso se resolvió la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden $y'(t)=y$, $y(0)=1$, $t \in [0,1]$ en forma rápida y simple por tres métodos numéricos: Euler, Runge-Kutta 2do orden, y Runge-Kutta 4to orden; y variando el paso de integración. Para ello se empleó Matlab™. Los resultados son consecuentes con la teoría, mostrando la conveniencia para resultados de menor error el Método de Runge-Kutta de 4^{to} orden.

REFERENCIAS

- [1] "Apuntes de Computación Científica II Métodos EDO - Problemas de valores iniciales". Disponible en:
<http://www.ii.uam.es/~pedro/ccii/teoria/MetodosEDoInicial/MetodosEDoInicial.htm>